

پردازش تصاویر دیجیتال (بخش پنجم)

تبدیل فوریه ۲



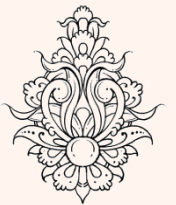
دانشگاه شهید بهشتی

پاییز ۱۴۰۲

احمد محمودی ازناوه

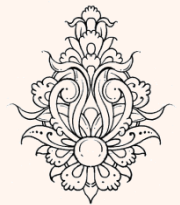
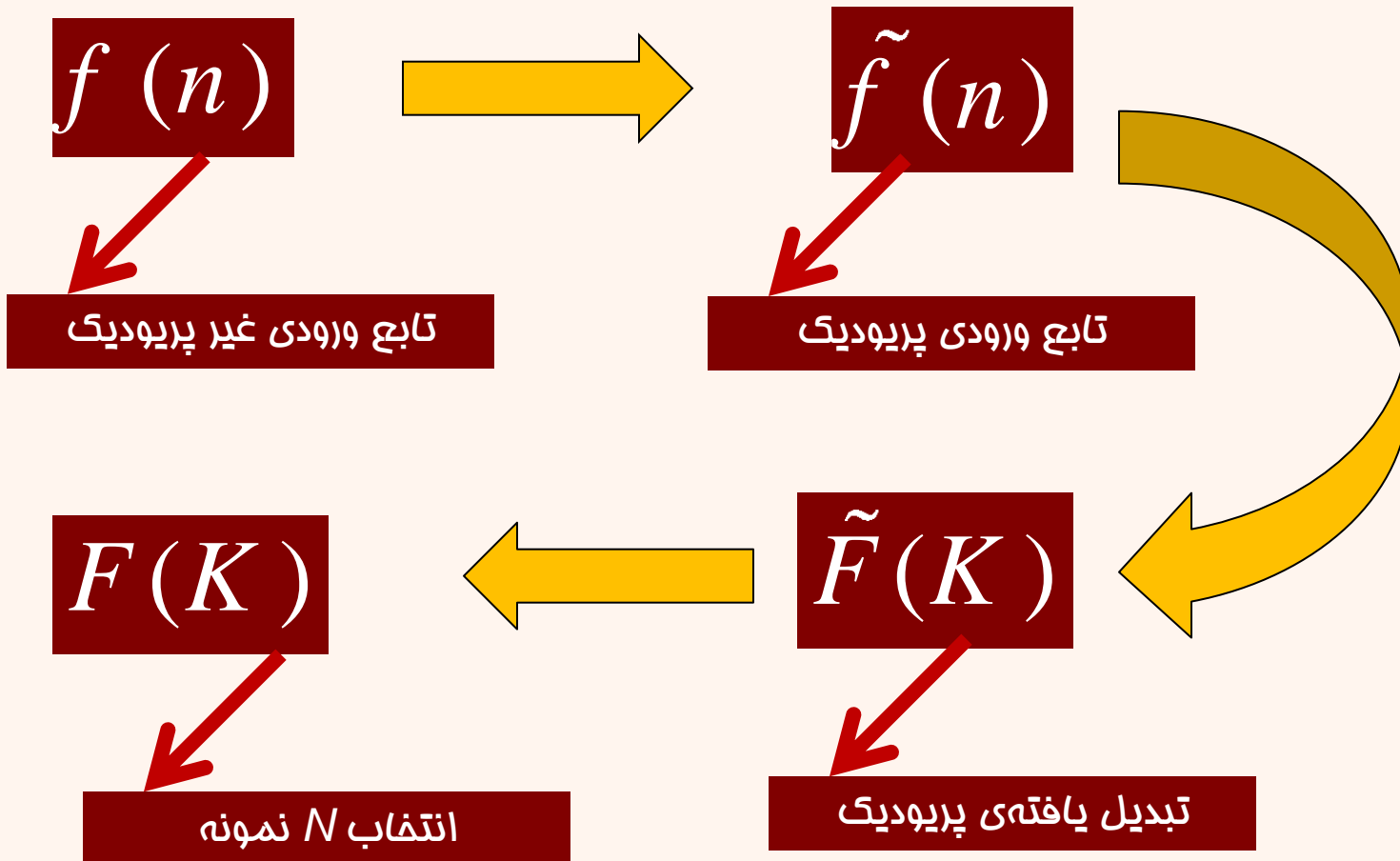
فهرست مطالب

- تصاویر پایه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دوبعدی
- تحلیل در حوزه‌ی فرکانس
- فیلتر پایین‌گذر گاوسی
- تحلیل سایر فیلترها



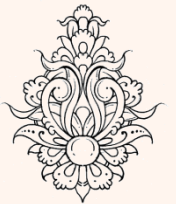
فرآیند محاسبه‌ی DFT

به گونه‌ای دیگر می‌توان به DFT نگاه کرد:
سیگنال در دامنه‌ی مکان را به صورت متناوب درآمده و سپس از آن
تبدیل فوریه گرفته می‌شود.

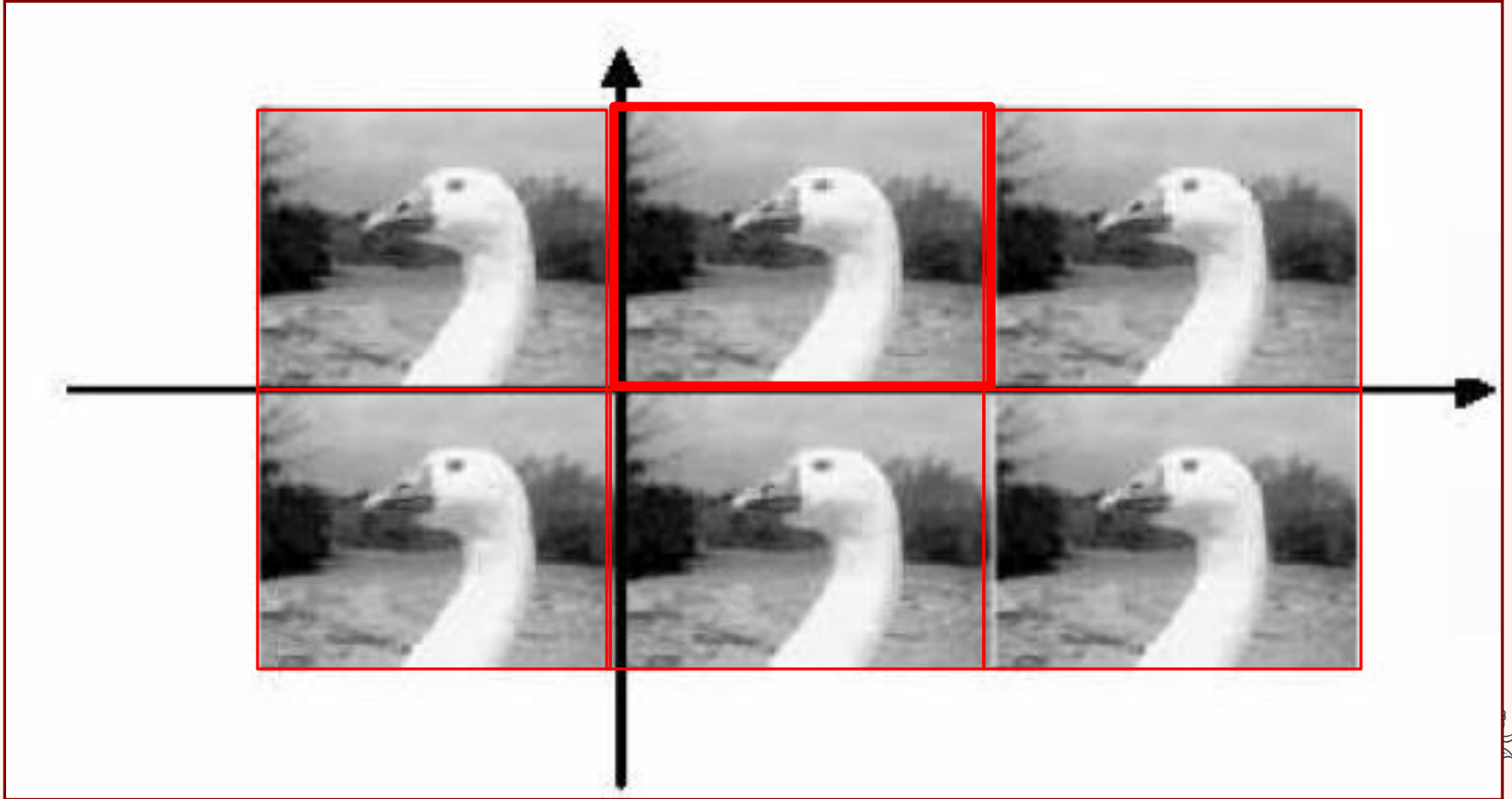


تبدیل فوریه گسسته (ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
- همانند تبدیل گسسته فوریه یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.



متناوب نمودن تصویر



چگونگی متناوب کردن تصویر (سیگنال دو بعدی)



تبدیل گسسته‌ی یک بعدی

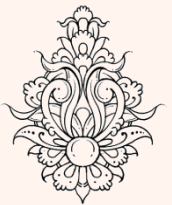
$$\begin{aligned} \{ z(n) \} &\Leftrightarrow \{ Z(k) \} \\ n, k &= 0, 1, \dots, N-1 \\ W_N &= \exp\{ -j2\pi / N \} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Z(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot W_N^{nk} \\ z(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot W_N^{-nk} \end{cases}$$

• ماتریس یکانی DFT به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{n,k} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\}, \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

- بردارهای پایه‌ی تبدیل یکانی DFT ستون‌های F^T یا همان F است. (زیرا F ماتریسی متقارن است).
- تذکر: برای این که ماتریس تبدیل یکانی باشد، رابطه‌ی تبدیل در \sqrt{N} ضرب شده است.

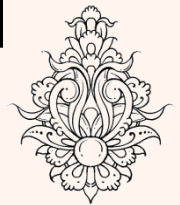


$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n)x(n)$$

ماتریس تبدیل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W_N = \exp\{-j2\pi / N\}$$



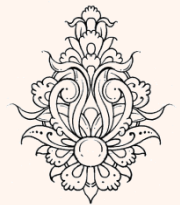
ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

For $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \mathbf{F}x$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



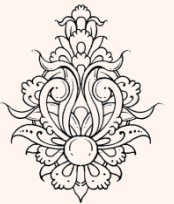
ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

$$X(0) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{0}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(0)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(0)}{4}}$$

$$X(1) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(1)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(1)}{4}}$$

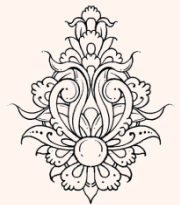
$$X(2) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(2)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(2)}{4}}$$

$$X(3) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{3}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(3)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(3)}{4}}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

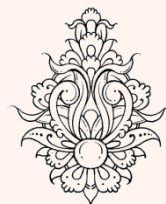
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (مثال)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

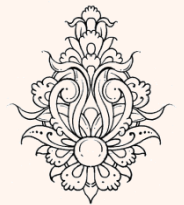
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

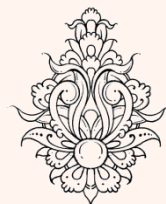


تبدیل معکوس

$$X = Wx \rightarrow DFT$$



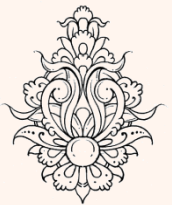
$$x = W^H X \rightarrow IDFT$$



- به وسیله‌ی دستور fft می‌توان DFT یک سیگنال را محاسبه نمود.

$Y = fft(X,n)$ returns the n -point DFT

- اگر طول X از n کم‌تر باشد عموماً به همان تعداد صفر به انتهای سیگنال اضافه شود.



تبدیل فوریه دوبعدی گسسته

برای سادگی ماتریس را مربعی در نظر می‌گیریم

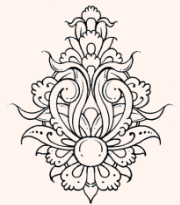
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_f = \frac{1}{N} \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

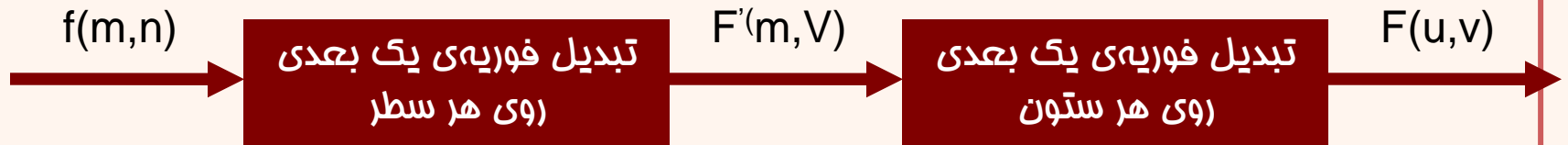
$$t_b = \frac{1}{N} \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_b = t_f^{*T} = t_f^{-1} \Rightarrow \text{unitary matrix}$$



خاصیت جدایی‌پذیری تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه دارای خاصیت **خطی** است.
- تبدیل فوریه تبدیلی **جدایی‌پذیر** است.



$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp(-j 2\pi (um / N + vn / N)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp(-j 2\pi um / N) \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp(-j 2\pi vn / N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F'(m,v) \exp(-j 2\pi um / N) \end{aligned}$$



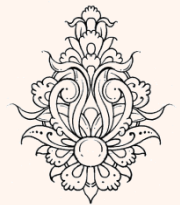
$$W_N = \exp(-j2\pi / N)$$

تصاویر پایه

- برای تبدیل دو بعدی فوریه تصاویر پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^u \\ W_N^{2u} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \end{bmatrix}$$

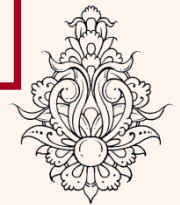
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$W_N = \exp(-j2\pi / N)$$

تصاویر پایه

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \\ W_N^u & W_N^{u+v} & W_N^{u+2v} & \dots & W_N^{u+(N-1)v} \\ W_N^{2u} & W_N^{2u+v} & W_N^{2u+2v} & \dots & W_N^{2u+(N-1)v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ W_N^{(N-1)u} & W_N^{(N-1)u+v} & W_N^{(N-1)u+2v} & \dots & W_N^{(N-1)u+(N-1)v} \end{bmatrix}$$



به دست آوردن تصاویر پایه

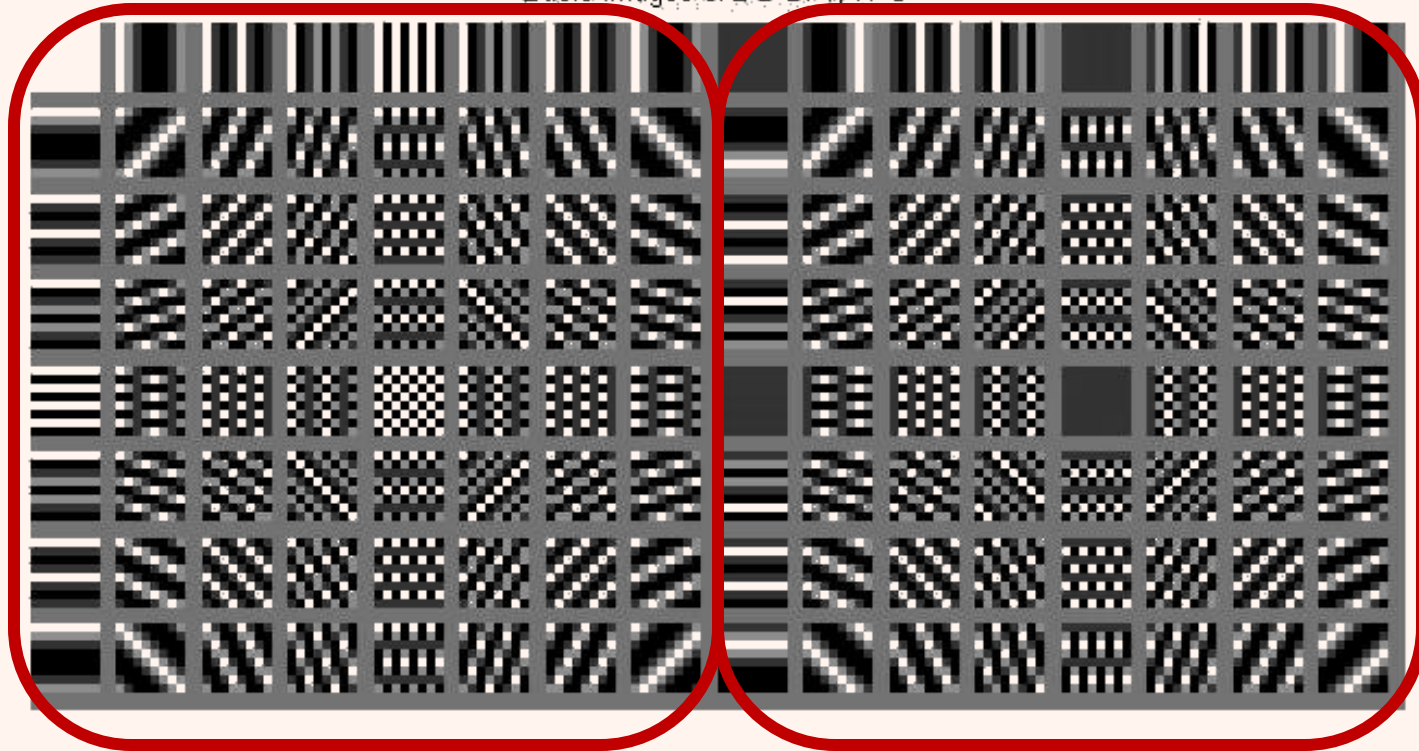
```
N=8 ;  
F=zeros (N,N) ;  
for n=1:N  
    for k=1:N  
        F (n,k)=exp (-j*2* (pi/N) * (n-1) * (k-1)) ;  
    end  
end  
A=cell (N,N) ;  
for u=1:N  
    for v=1:N  
        A{u,v}=(F (:,u) *F (v,:)) ;  
    end  
end
```

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



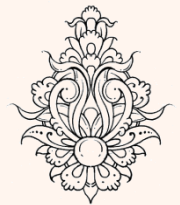
تصاویر پایه

Basis Images of 2-D DFT; N=8



قسمت مقیقی

قسمت موهومی

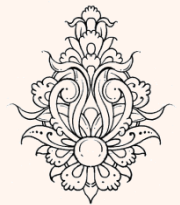


نکات

- هر یک از تصاویر پایه نشان‌دهنده‌ی خواص مولفه‌های مربوط است.
- مولفه‌ی $(0,0)$ نشان‌دهنده‌ی مقدار میانگین یا مقدار DC تصویر است.
- طبق خواص تبدیل فوریه داریم:

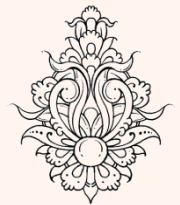
$$\text{real}(i,j) == \text{real}(N-1-i, N-1-j)$$

- بیشترین فرکانس متعلق به مولفه‌ی $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ است (برای تبدیل 8×8).
- هرچه به مرکز نزدیک می‌شویم فرکانس افزایش می‌یابد.

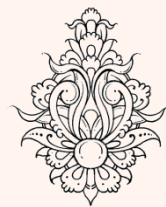
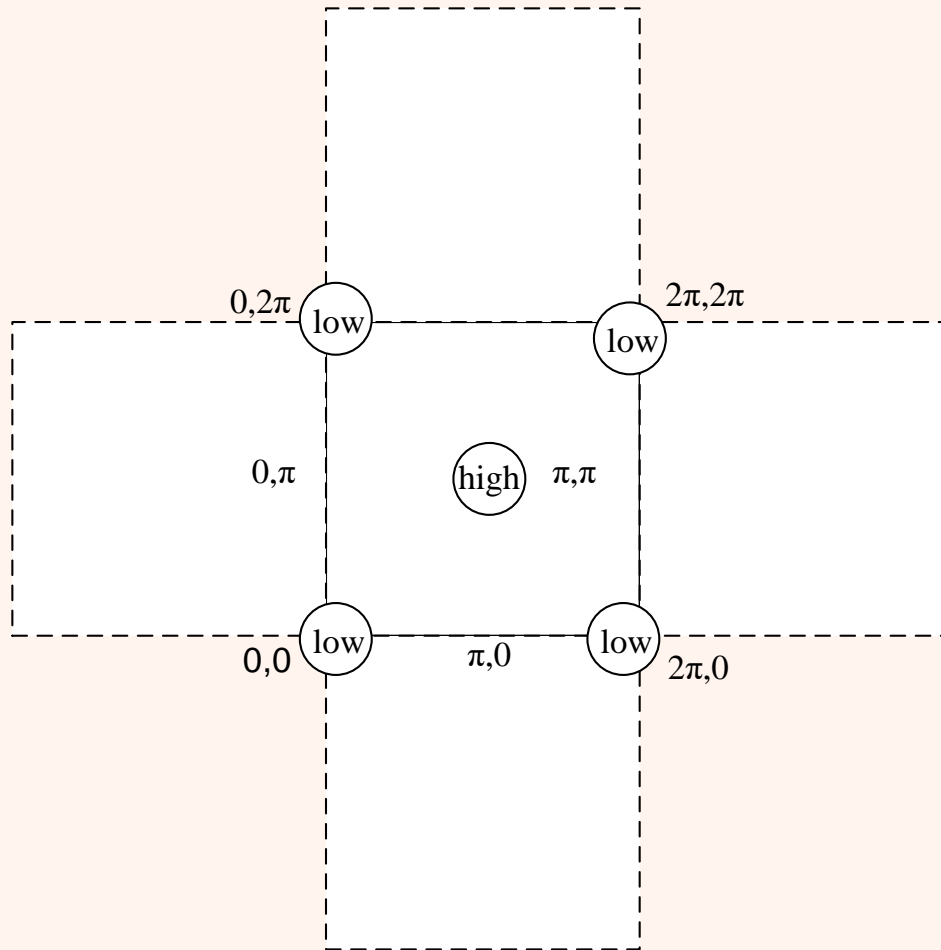


نکات

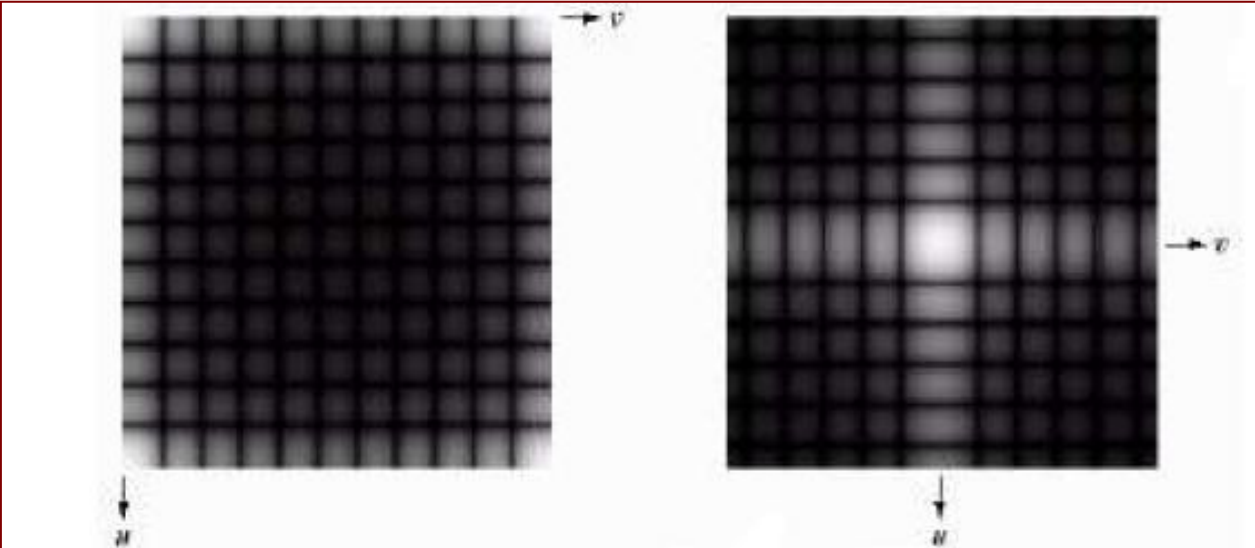
- تصاویر پایه‌ی افقی و عمودی نشان‌دهنده‌ی وجود چنین ساختارهایی در تصویرند.
- اگر ضرایب متناظر با هر یک از تصاویر پایه صفر باشد یعنی میزان اشتراک چنین تصویر پایه‌ای در ساختن تصویر اصلی صفر است.
- به صورت کلی هر ضریب میزان دخالت تصویر پایه‌ی متناظر را در ساختن تصویر اصلی نشان می‌دهد.



دامنه‌ی فرکانس سیگنال‌های زمان‌گسسته

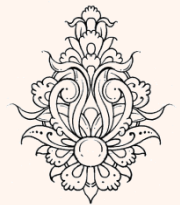
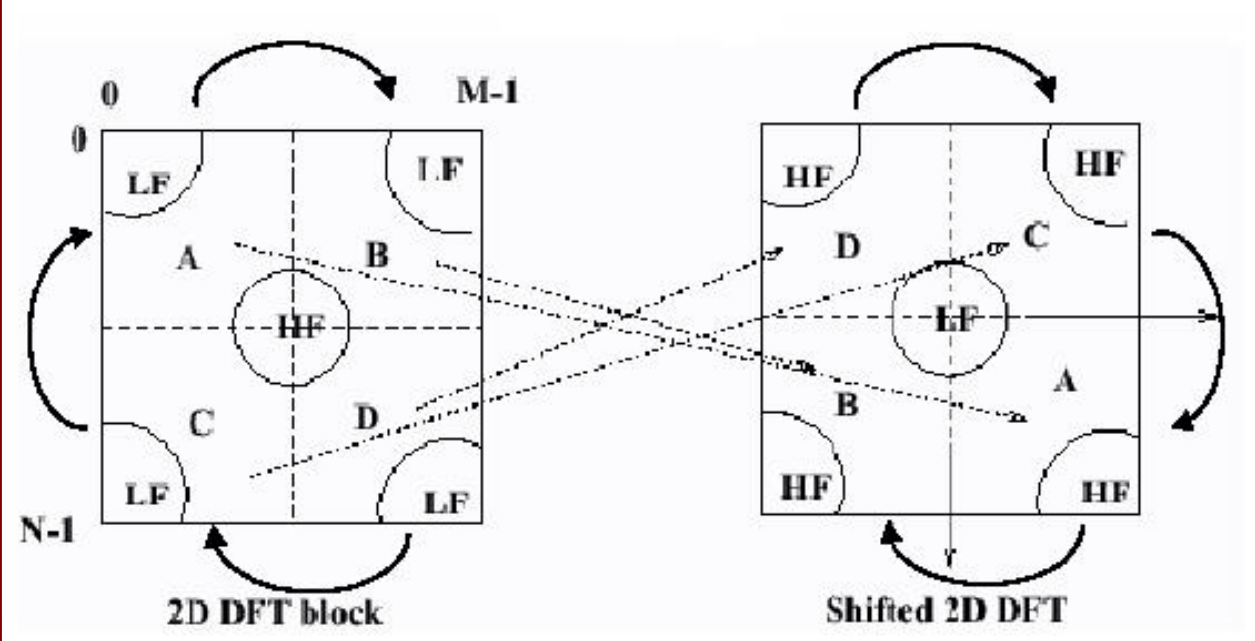


نمایش اندازه‌ی تبدیل فوریه در دو روش



مبدأ بالا (سمت چپ)

مبدأ وسط



Fourier Spectrum

$$|F(u, v)| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{1/2}$$

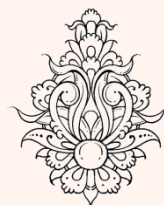
Phase Angle

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)}$$

Power Spectrum

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$



تأثیر فاز

- تبدیل فوریه دارای دو مقدار **حقیقی** و **موهومی** است.
- جهت تحلیل مقادیر اندازه و فاز مناسبه می‌شود که برای تبدیل معکوس به هر دوی این مقادیر نیاز است.

اندازه‌ی تبدیل فوریه (مبدأ به وسط)
انتقال یافته



فاز تبدیل فوریه



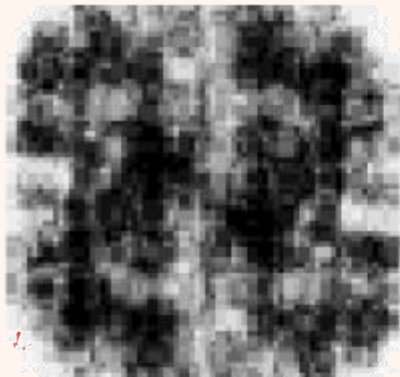
تصویر اصلی

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

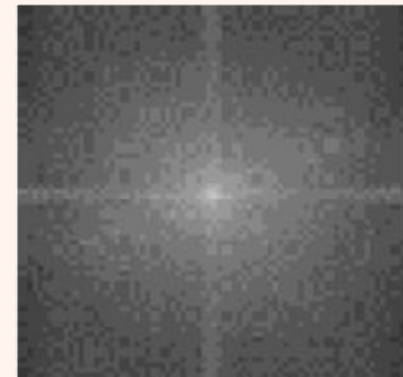
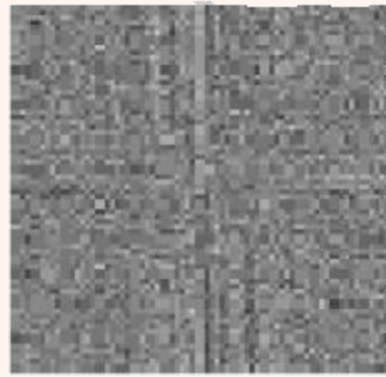


ژانرگاه
سپهر
بهشتی

تصویر بازسازی شده با اندازه
تبدیل و فاز صفر

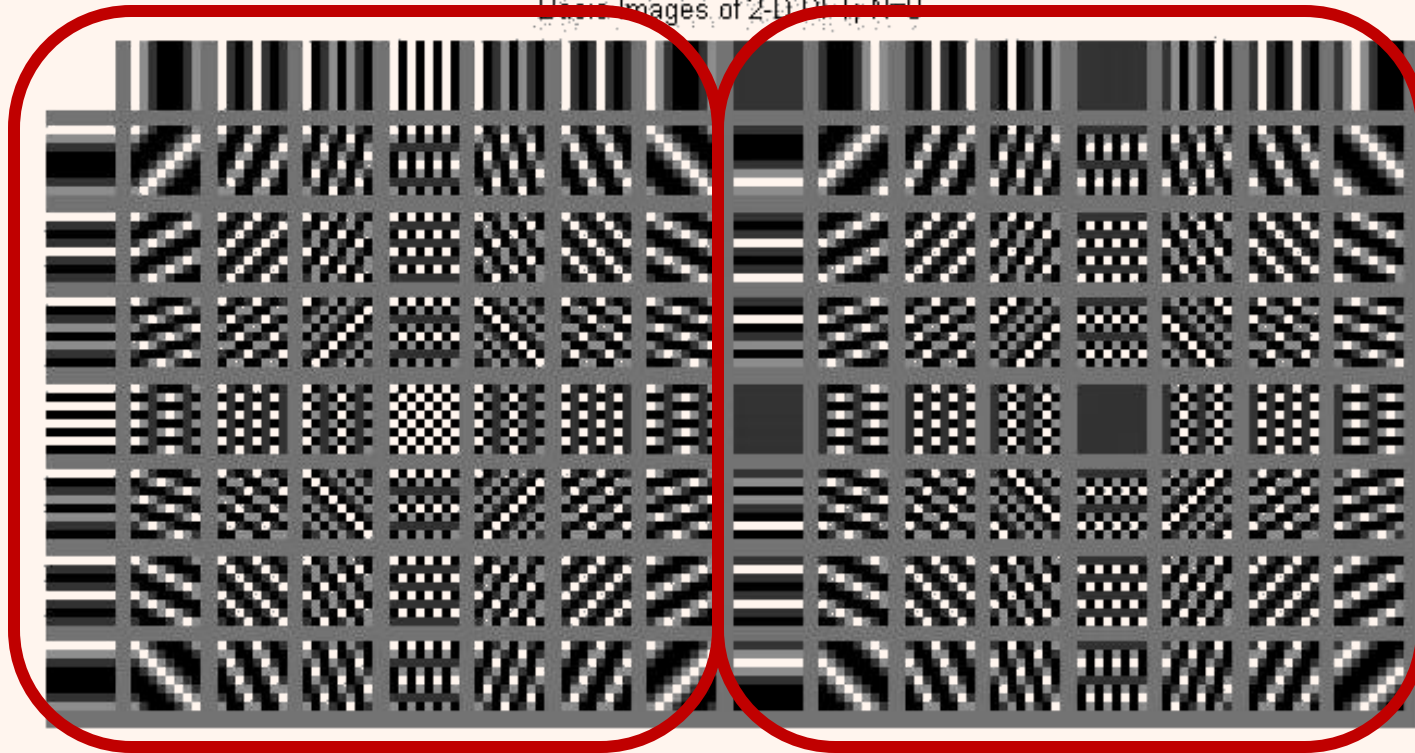


تصویر



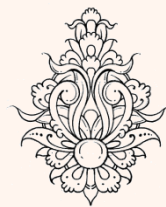
تصاویر پایه

Basic Images of 2-D DFT, N=8



قسمت مقیقی

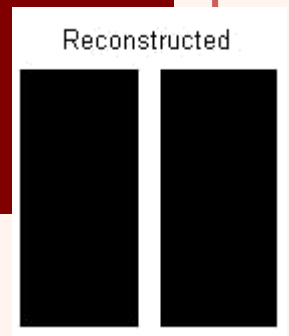
قسمت موهومی



```

f=zeros(128,128);
f(:,60:70)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of
shifted version');
Phase=atan2(imag(F),real(F));
figure;imshow(Phase,[ ]);title('Phase Angle');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');

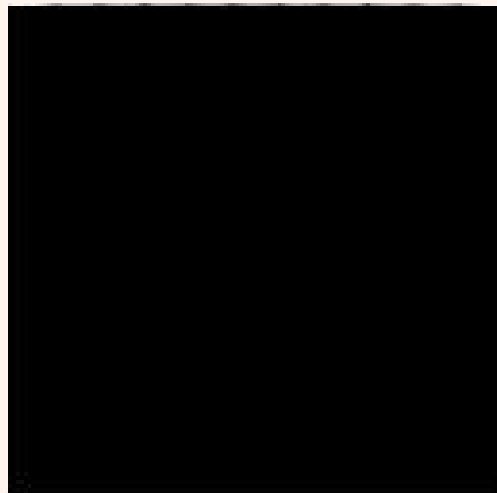
```



Original



Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version

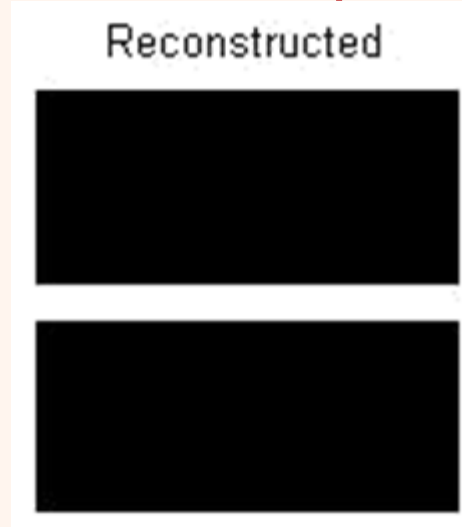


Phase Angle

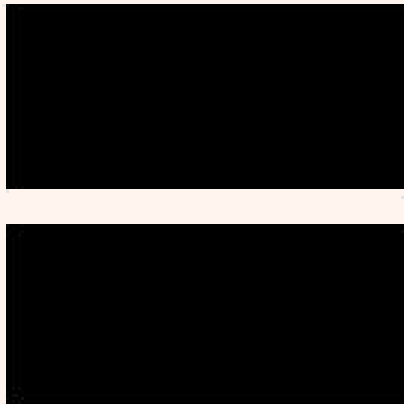


مثال

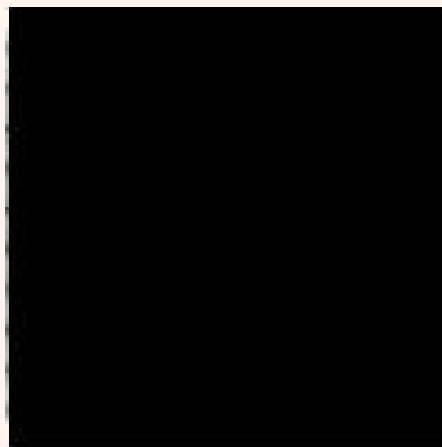
```
f=zeros(128,128);  
f(60:70,:)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```



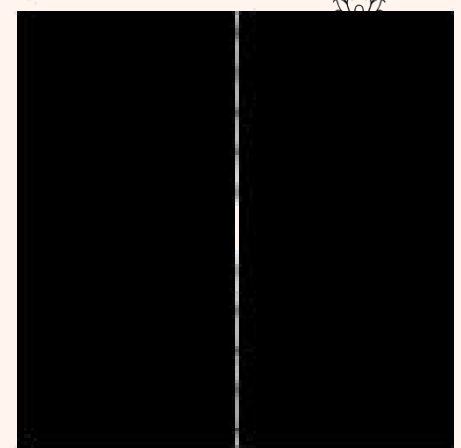
Original



Log of Abs of F



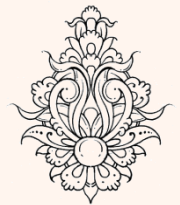
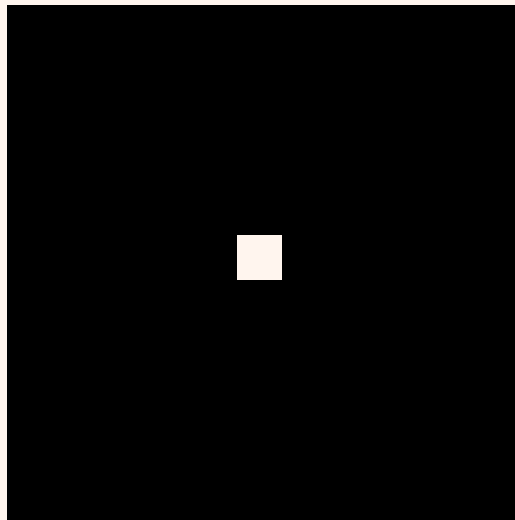
Log of Abs of shifted version



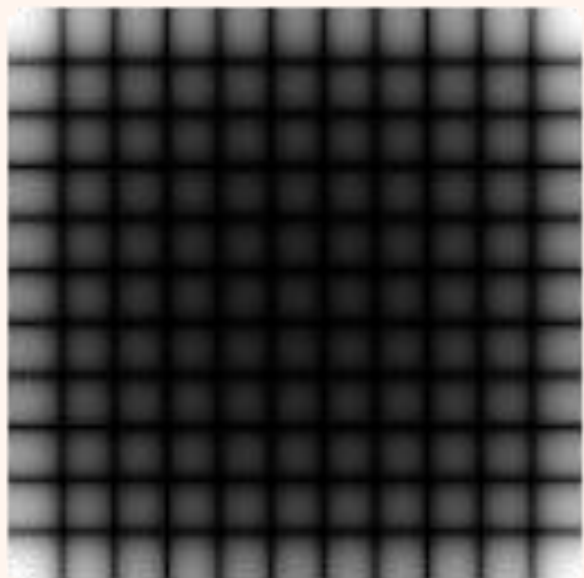
مثال ۳

```
f=zeros(128,128);  
f(58:68,58:68)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of  
shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

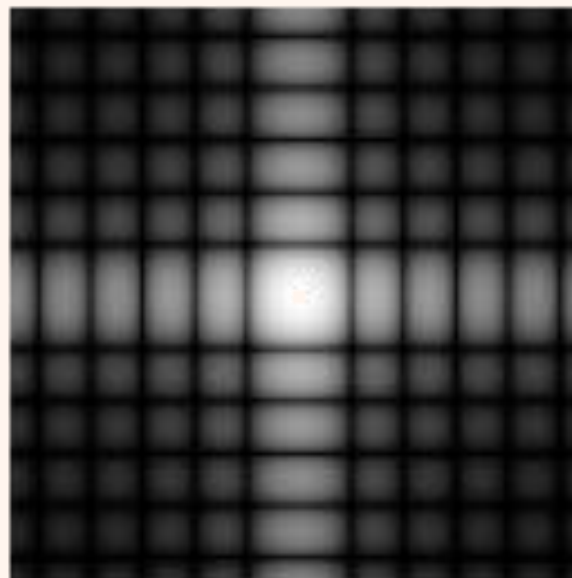
Original



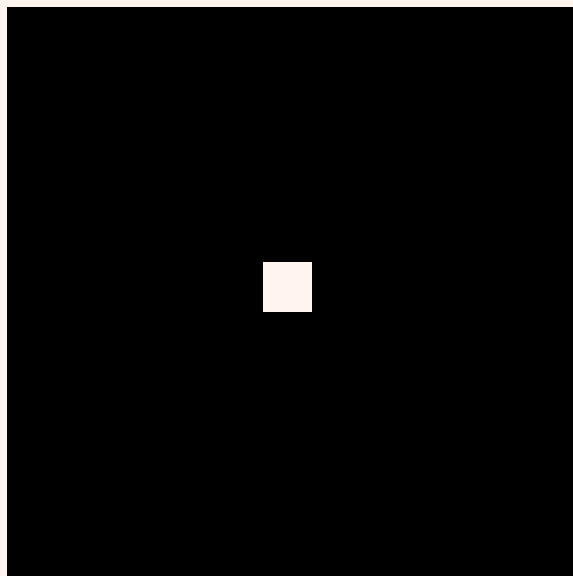
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version



Reconstructed



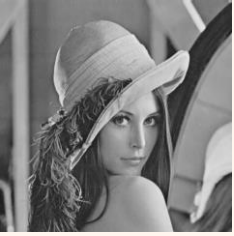
خصوصیات تبدیل فوریه

• جهت نشان دادن خواص فرکانسی (تخمیرات روشنایی در تصویر)، از تبدیل فوریه استفاده می‌شود.

- نوامی با روشنایی یکسان فرکانس صفر
- نوامی با تخمیرات روشنایی تدریجی فرکانس پایین
- نوامی با تخمیرات روشنایی ناگهانی فرکانس بالا



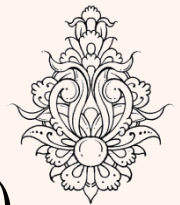
تصاویر پایه



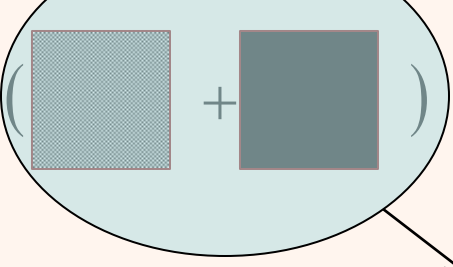
بخش حقیقی

بخش موهومی

$$\begin{aligned}
 & F(0,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[White Box]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) + F(0,1) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Gradient]} \\ + \\ \text{[Vertical Gradient]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \text{508068} \qquad \qquad \qquad \text{-8732.34 + 37028.8i} \\
 & F(1,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Gradient]} \\ + \\ \text{[Vertical Gradient]} \end{array} \right) + F(1,1) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Diagonal Gradient]} \\ + \\ \text{[Anti-Diagonal Gradient]} \end{array} \right) \\
 & \text{331.5 - 19201.6i} \qquad \qquad \qquad \text{-26840.2 + 22678.2i} \\
 & F(2,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \text{-6749.5 - 3133.36i} \\
 & F(3,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \text{474.481 - 9085.3i} \\
 & \dots \qquad \qquad \qquad F(32,32) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Grid Pattern]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) \\
 & \dots \qquad \qquad \qquad \text{-133. - 279.i} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

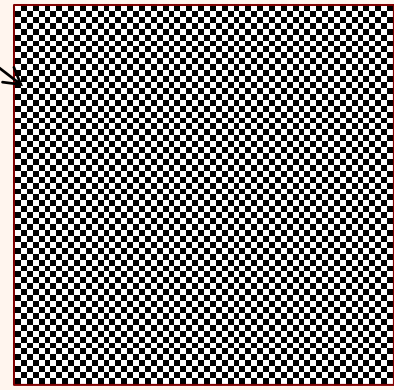


$$F(32,32) \times ($$



تصاویر پایه

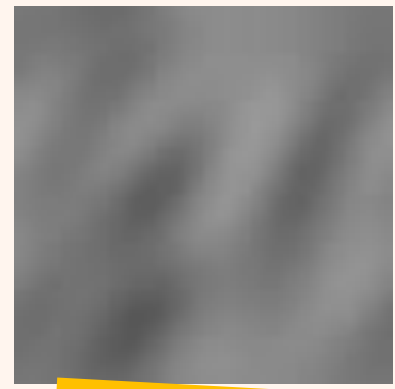
-133. - 279.i



بازسازی تصویر با استفاده از تصاویر پایه



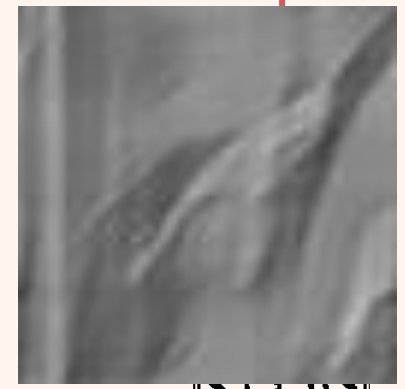
۱(۰.۰۰۲٪)



۱۶(۰.۳۹٪)



۱۰۰(۲٪)



۱۴۰۰(۹.۷٪)

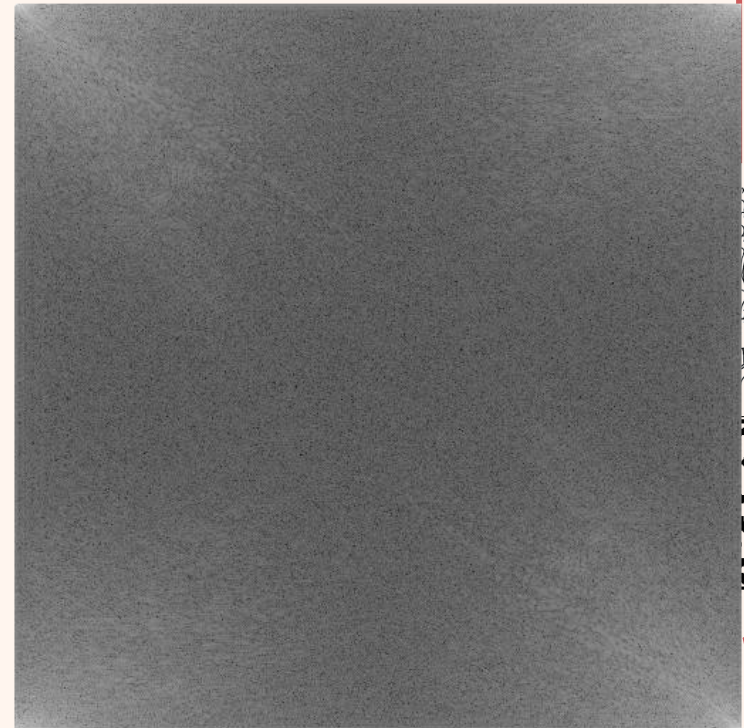
```
f = imread('lena.gif');  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);  
title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);  
title('Log of Abs of shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

Original

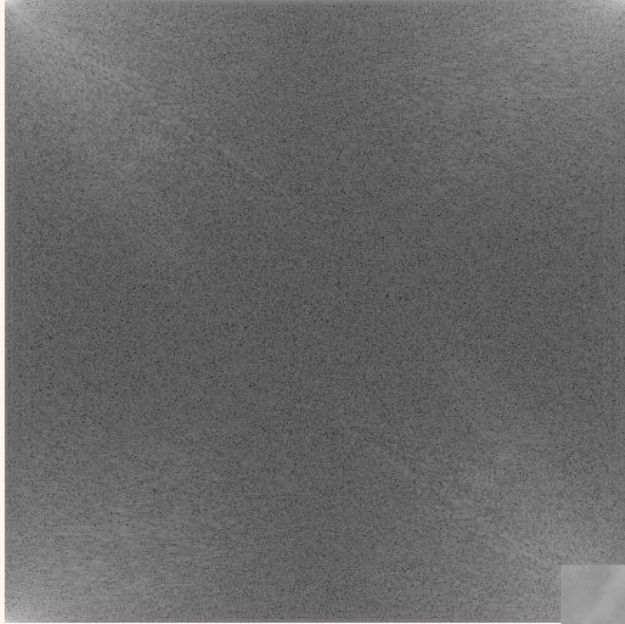


تصویر اصلی

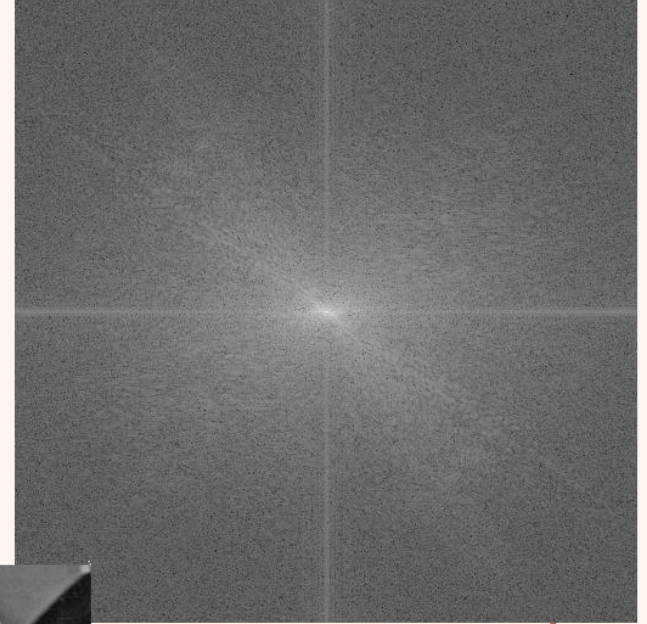


مثال (ادامه...)

Log of Abs of F



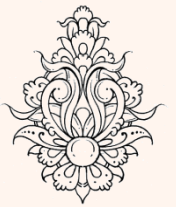
Log of Abs of shifted version



Reconstructed



تصویر دوباره
سازی شده




```
f = imread('lena.gif');
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of shifted version');
Phase=atan2(imag(F),real(F));
figure;imshow(Phase,[ ]);title('Phase Angle');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```



تصویر اصلی

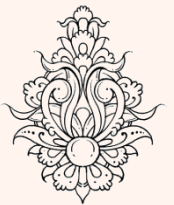


تصویر دوباره سازی شده

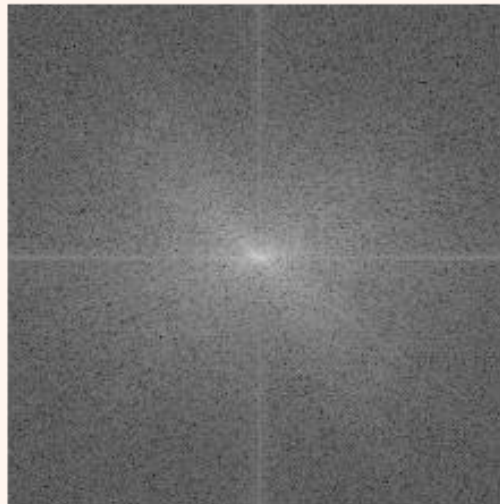
اندازه

فاز

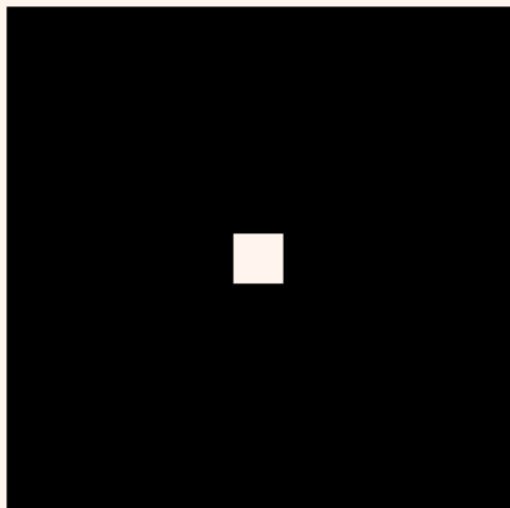
```
f = imread('lena.gif');  
figure,imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
Fc=fftshift(F);  
mask=zeros(size(F));  
MskWd=floor(size(F,1)*0.1/2);  
mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-  
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;  
figure,imshow(mask,[ ]);title('mask');  
figure,imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]),title('Compre  
ssed image');
```



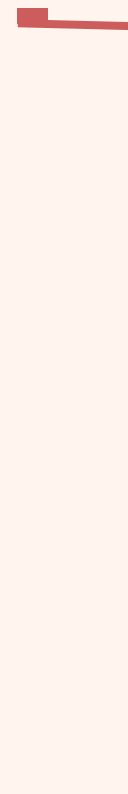
Original



mask



Compressed Image



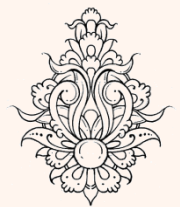
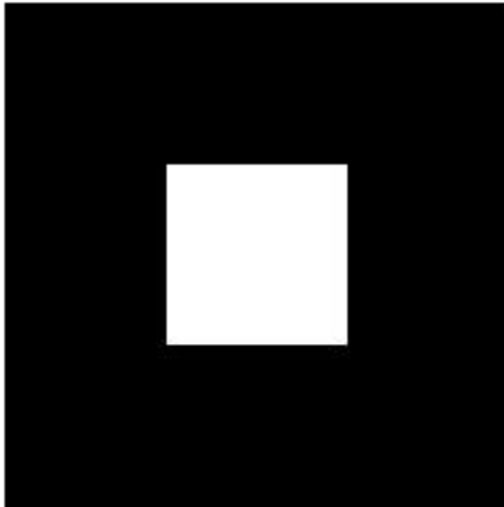
مثال

```
f = imread('lena.gif');
F = fft2(f);
mask=zeros(size(F));
for k=1:2:floor(size(F,1)/2)
    MskWd=k;
    mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;
    subplot(121),imshow(mask),title(num2str(k*2));
    subplot(122),imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]);
    pause
end
```



مثال (ادامه...)

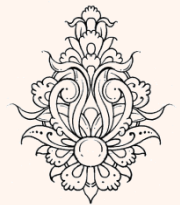
106



انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس

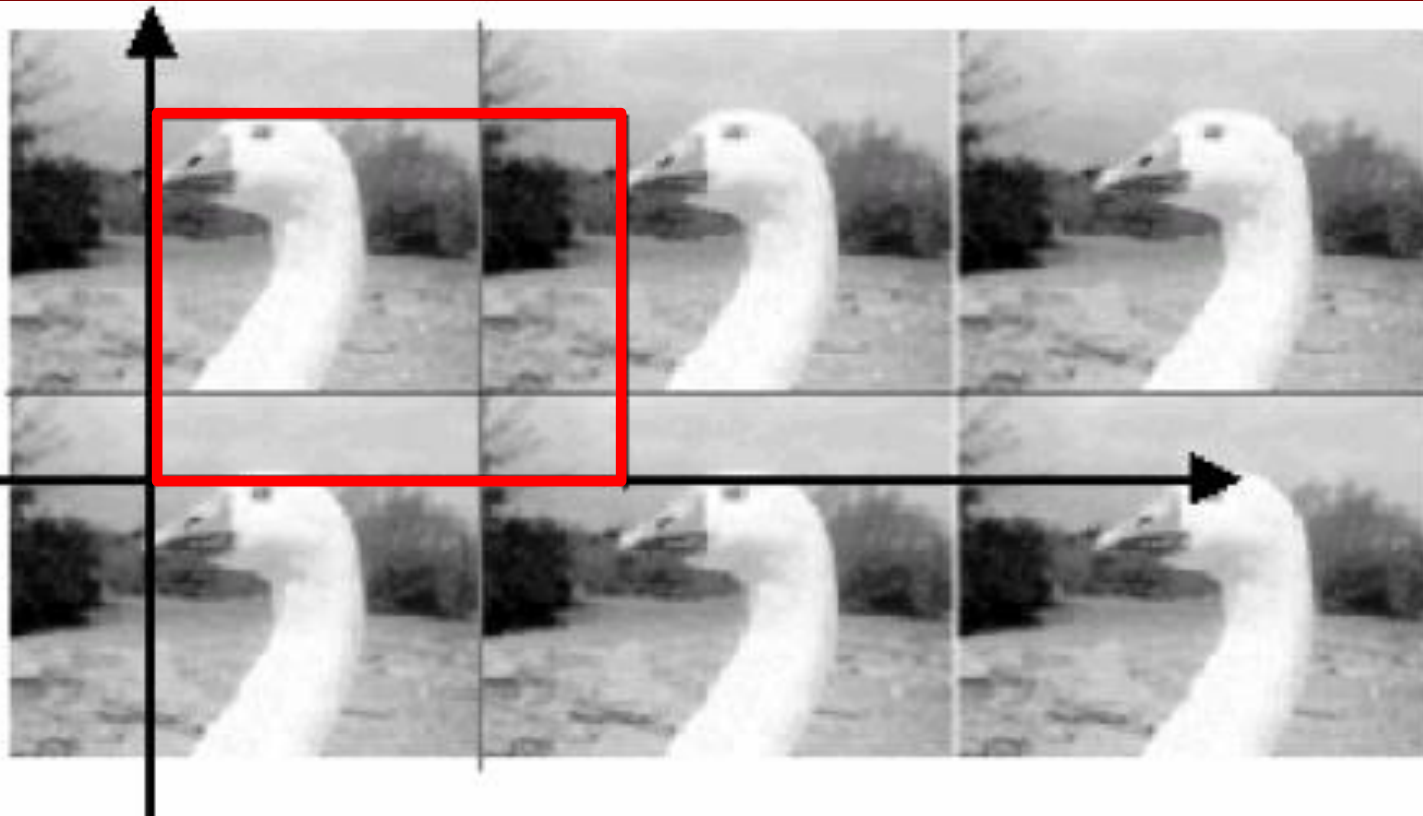
- انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس اثرات متقابلی در تبدیل فوریه و معکوس آن دارند.
- انتقال در حوزه‌ی زمان تنها در فاز اثرگذار است و در اندازه تأثیری نخواهد داشت.

$$\begin{aligned} F\{x(n-m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(k+m)\omega} \quad \text{if} \quad n-m=k \\ &= e^{-jmw} X(\omega) \end{aligned}$$



$$f(m-m_0, n-n_0) \xleftrightarrow{\text{DFT}} F(u, v) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} m_0 u - j \frac{2\pi}{N} n_0 v\right)$$

انتقال دایروی



انتقال قطبی تصویر متناوب شده یا انتقال دایروی سیگنال اصلی

کتابخانه
سپهر
بهشتی

چرخش در حوزه زمان

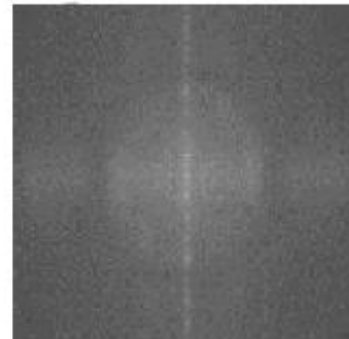
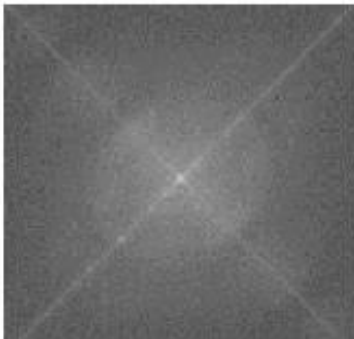
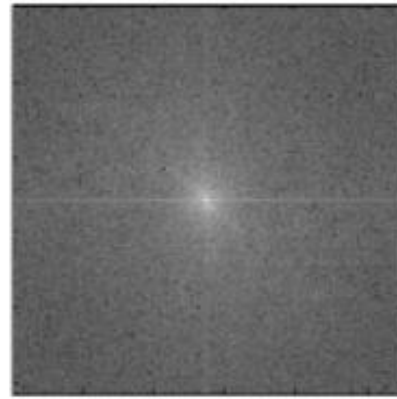
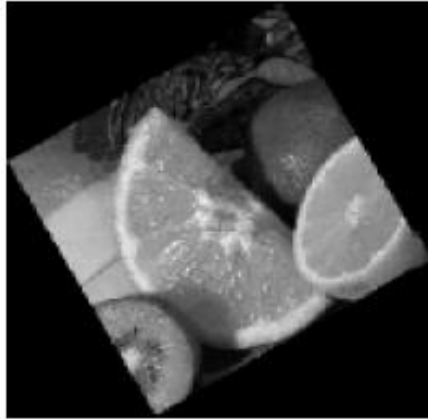
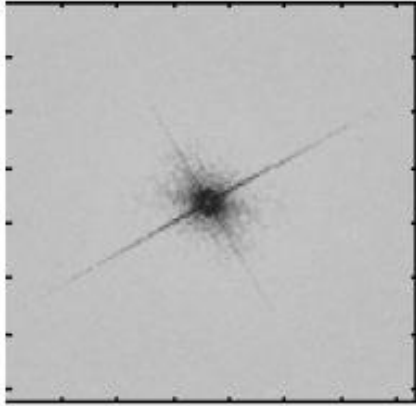
- چرخش در حوزه زمان، همان درجه چرخش در حوزه فرکانس را نتیجه می‌دهد.
- براساس مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} m &= r \cos \theta \\ n &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{in spatial domain}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega \cos \phi \\ v &= \omega \sin \phi \end{aligned} \right\} \text{in frequency domain}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(m, n) &\longleftrightarrow f(r, \theta) \\ f(r, \theta) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} f(r, \theta + \theta_0) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi + \theta_0) \end{aligned} \right.$$

مثال



Search for Love

My dear Liza, your memory is so dear
It is hard sometimes to describe to you
I thought the water under the moon
It only was: perhaps I could not say
And I am alone I stand by you
I found that your shadow follows me
Your smile has remained in my heart
I had to search with some of the stars
And the stars are not the proper light
That you have found them with their love
I could have found them with their love
But when I was with you I was with you
I had, I had, I had, I had, I had

Thomas Colburn

پژدهنده
سپهر
بهبودی

تصویر اصلی و چرخش یافته‌ی متناظر

تغییر مقیاس

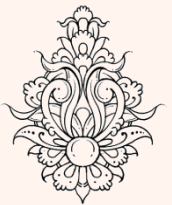
- گستردگی یا فشردگی در موزهی زمان-مکان نتیجهی معکوس در موزهی فرکانس خواهد داشت.

$$f(am, bn) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- متوسط سیگنال

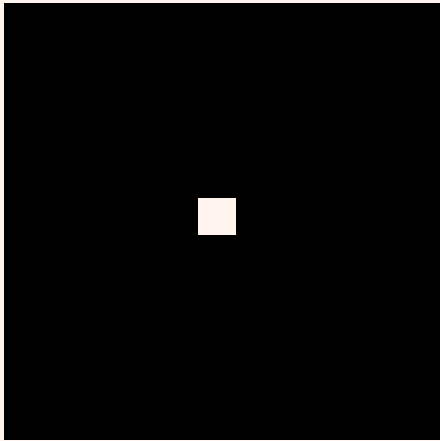
مقدار DC سیگنال از مولفه‌ی (0,0) به دست می‌آید

$$\text{Mean}[f(m, n)] = \bar{f}(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

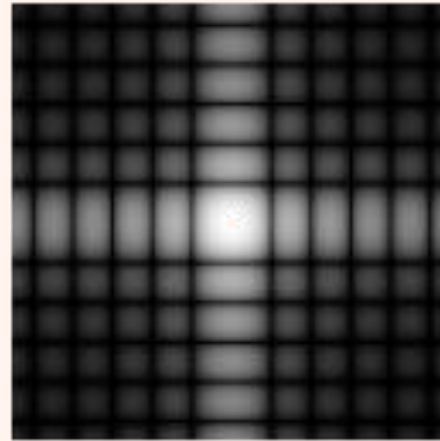


تغییر مقیاس (ادامه...)

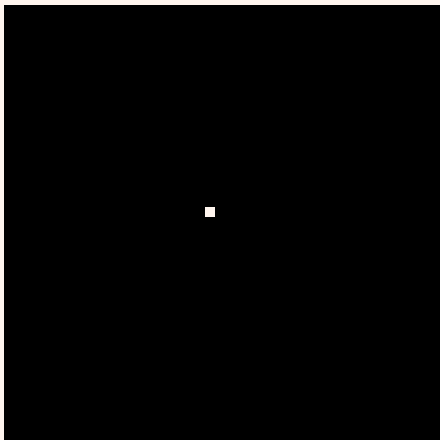
Original



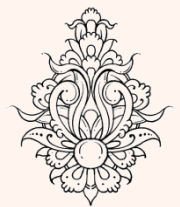
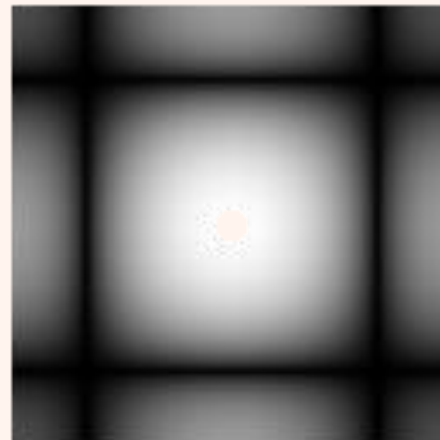
Log of Abs of shifted version



Original



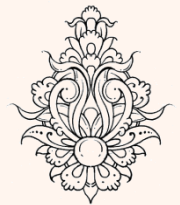
Log of Abs of shifted version



اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

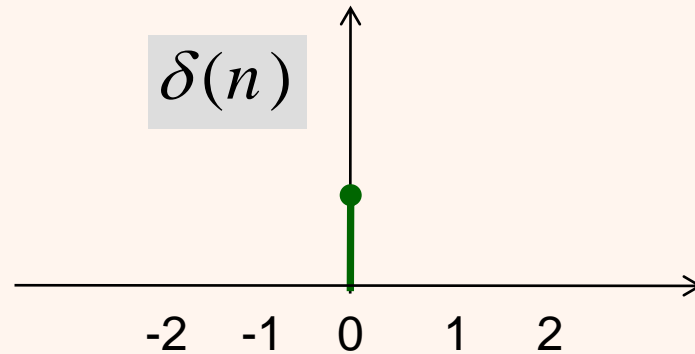
- در دامنه‌ی مکان اعمال فیلتر (LTI) معادل عملیات پیچیده‌ی کانولوشن است.
- در دامنه‌ی فرکانس کانولوشن معادل ضرب ماتریسی خواهد شد.
- توجه داشته باشید که برای فیلترهای کوچک، فیلتر کردن در دامنه‌ی مکان از لحاظ محاسباتی به صرفه‌تر است اما زمانی که ابعاد فیلتر افزایش می‌یابد، توصیه می‌شود در دامنه‌ی فرکانس این کار صورت پذیرد.

$$I(m, n) * H(m, n) \longleftrightarrow I(u, v) H(u, v)$$



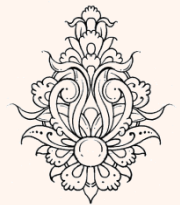
تابع ضربیه

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



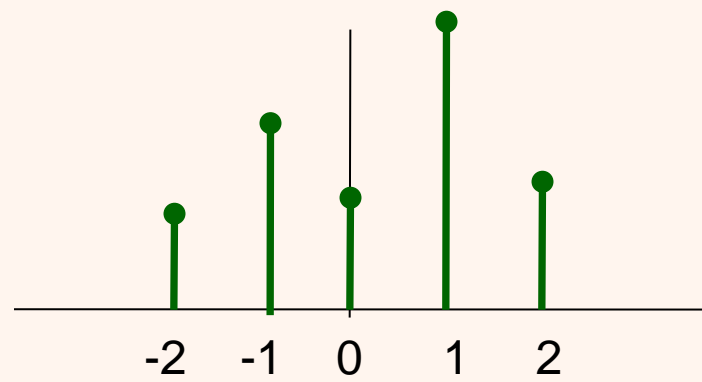
- می‌توان برای نمایش ساختار گسسته‌ی هر تابع، رابطه‌ای به صورت زیر داشت:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

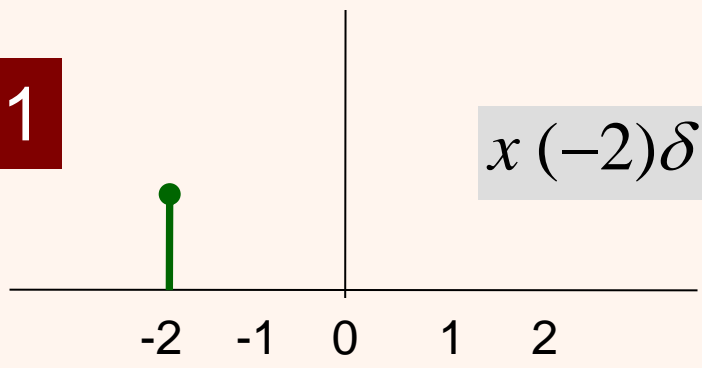


تابع ضربیه (ادامه...)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

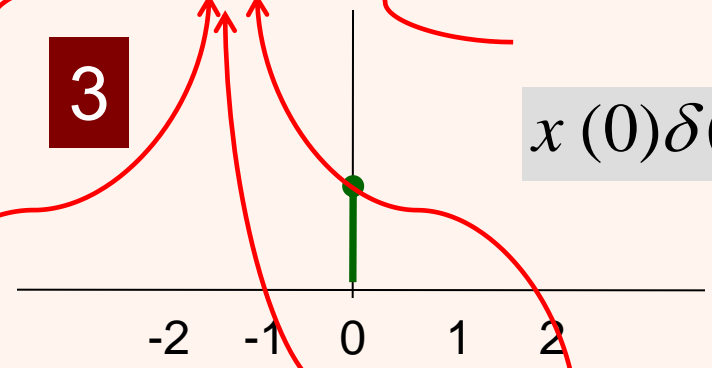


1



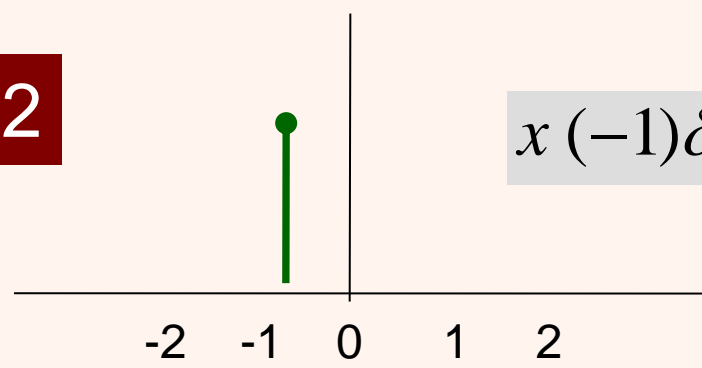
$$x(-2)\delta(n - (-2))$$

3



$$x(0)\delta(n - 0)$$

2



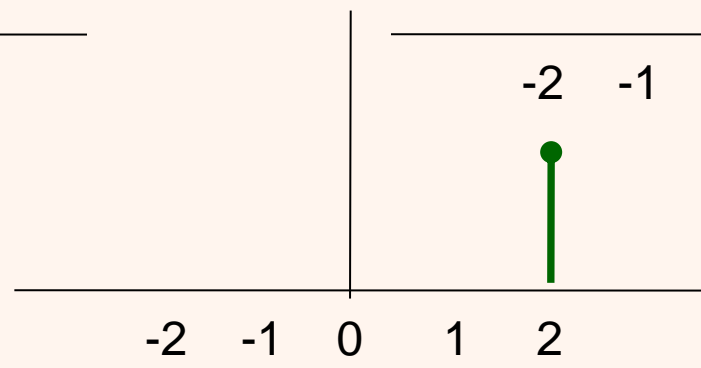
$$x(-1)\delta(n + 1)$$

4



$$x(1)\delta(n - 1)$$

5



$$x(2)\delta(n - 2)$$



- اگر x ورودی سیستم باشد به وسیله تبدیل به خروجی y نگاشت می‌شود.

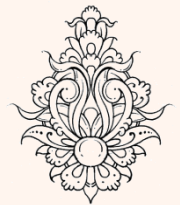
$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

- هر سیگنال را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

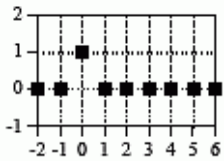
- پس خواهیم داشت:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right]$$

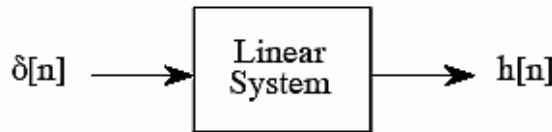
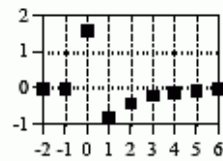


سیستم خطی و ثابت

Delta Function



Impulse Response



$$\text{Linearity} \quad ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$$

$$\text{Time Invariance} \quad x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0)$$

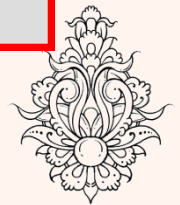
$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n - k)]$$

• حال باید دید پاسخ $T[\delta(n-k)]$ چیست؟

– اگر $h(n) = T[\delta(n)]$ باشد خواهیم داشت:

$$h(n - k) = T[\delta(n - k)]$$

$$\delta(n - k) \xrightarrow{T} h(n - k)$$



ادامه...

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

$$\delta(n-k) \rightarrow T \rightarrow h(n-k)$$

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

Convolution

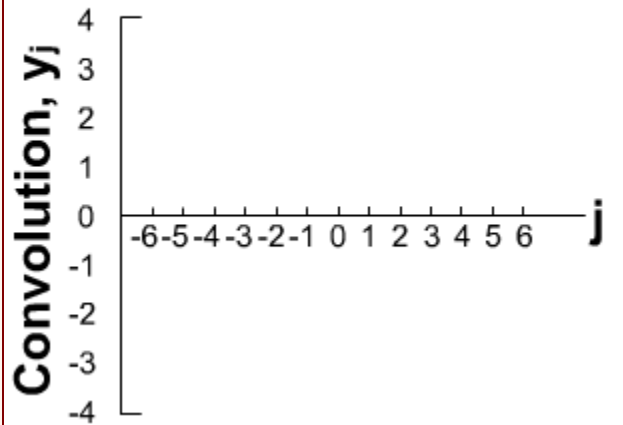
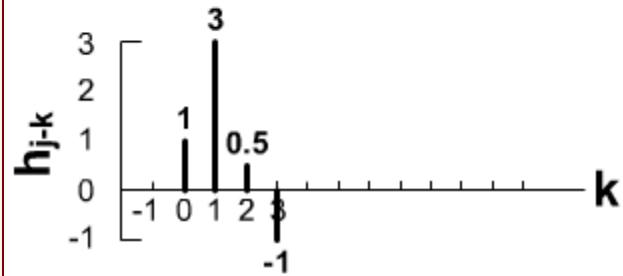
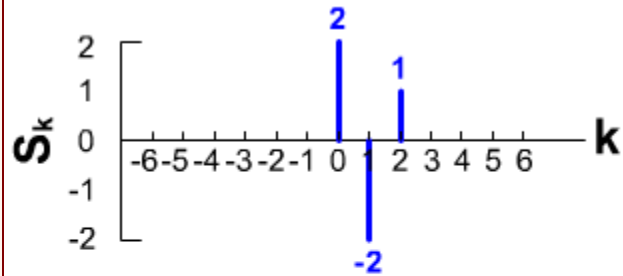
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$



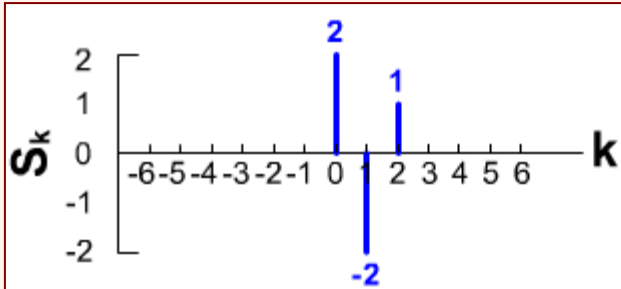
تأسیسات
سازمان
آموزش و پرورش

مثال

$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$
$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$
$$1 \ 3 \ 0.5 \ -1$$

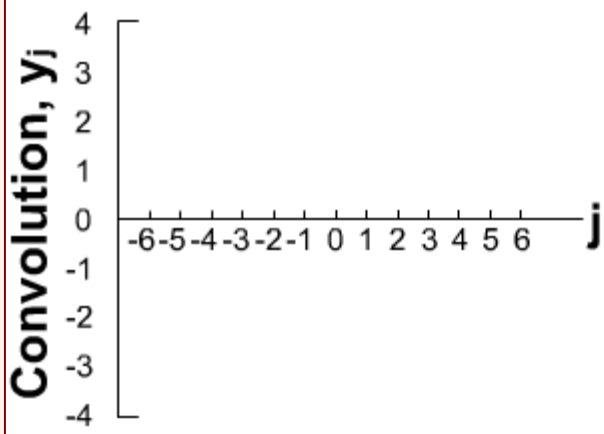
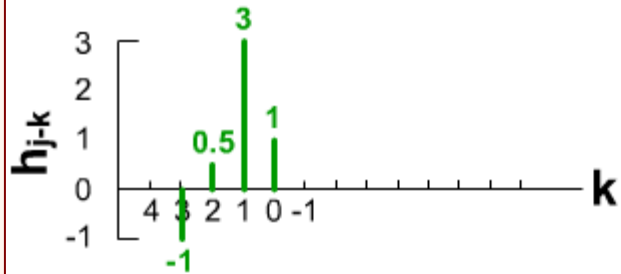


مثال (ادامه...)



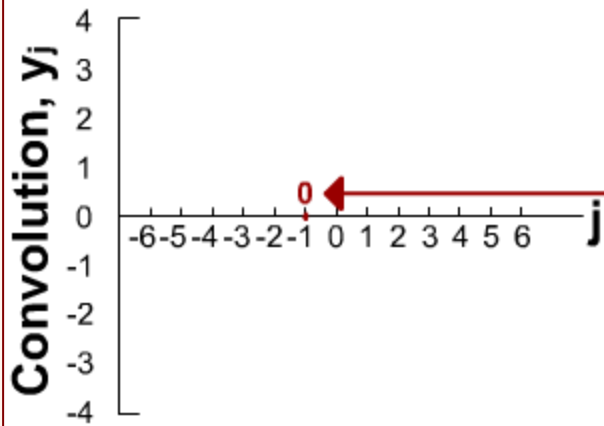
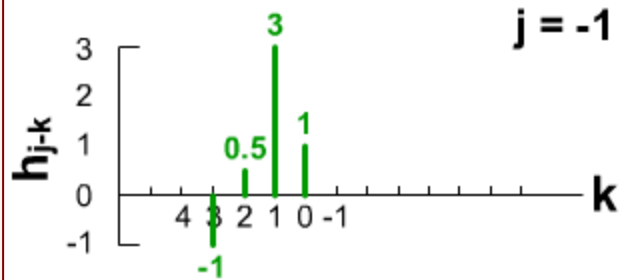
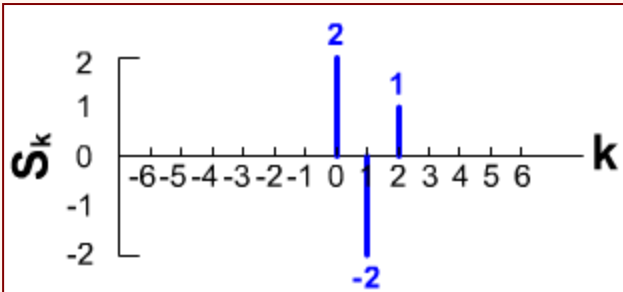
$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$

$$= \begin{matrix} 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0.5 & 3 & 1 & & & & \end{matrix} *$$



تفصیلی

مثال (ادامه...)



$$y_{-1} = \sum_k S_k h_{-1-k}$$

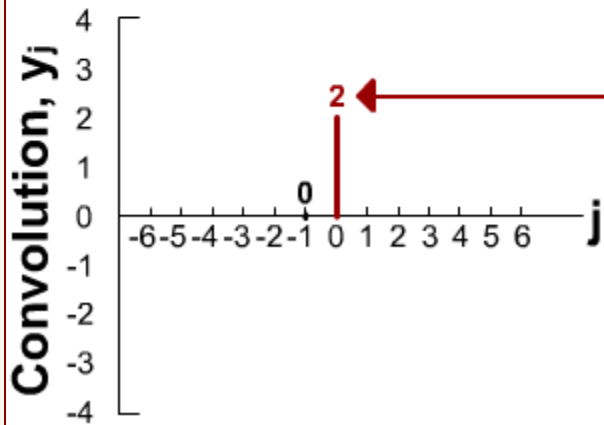
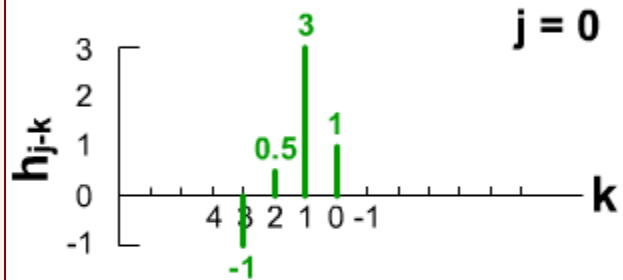
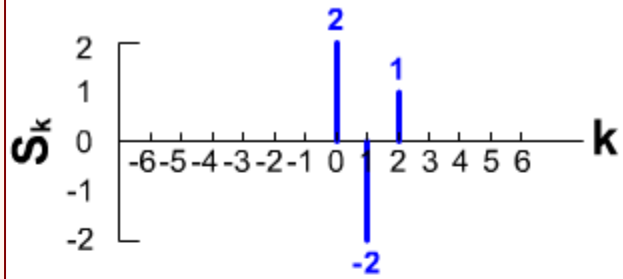
$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$

$$-1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

$$\rightarrow (0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

پیشگویی

مثال (ادامه...)



$$y_0 = \sum_k S_k h_{0-k}$$

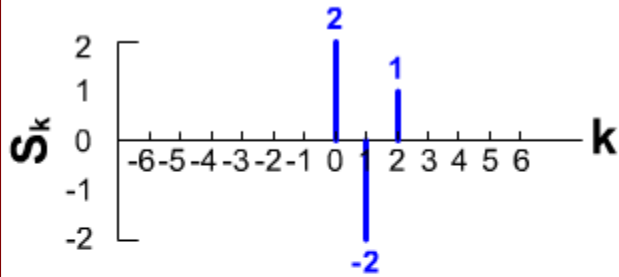
$$= 0 \cdot 2 \cdot -2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot *$$

$$-1 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

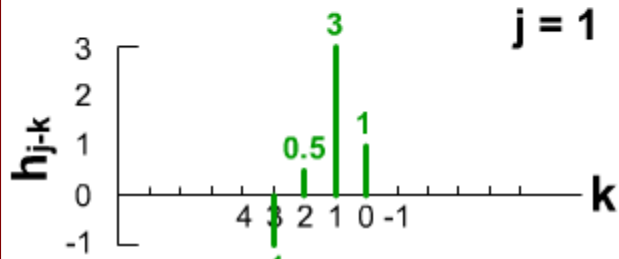
$$\rightarrow (0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

مثال (ادامه...)



$$y_1 = \sum_k S_k h_{1-k}$$

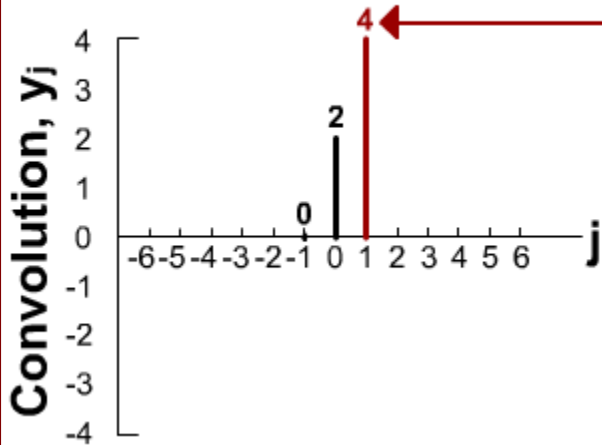
$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ * \\ -1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$



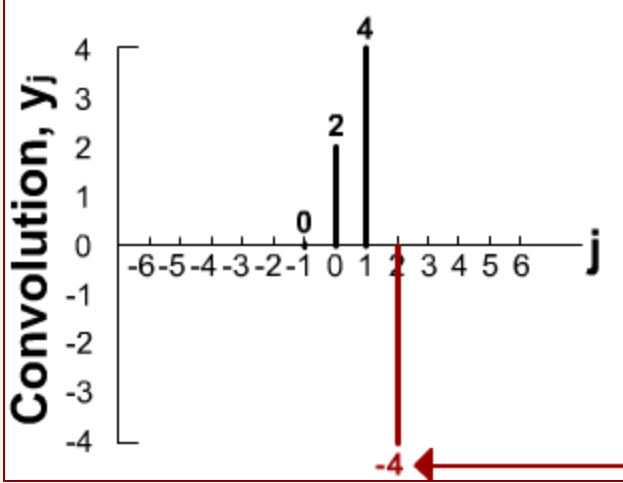
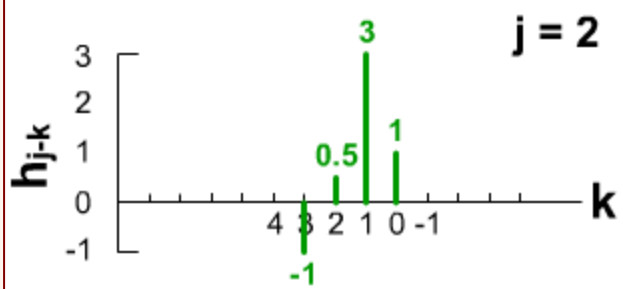
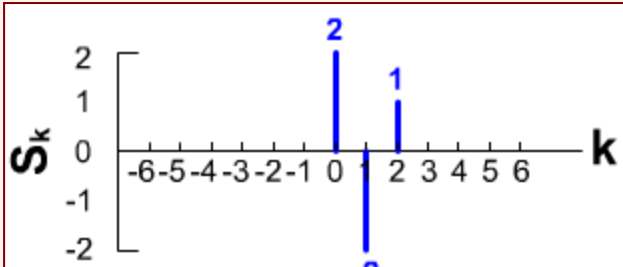
$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$



مثال (ادامه...)



$$y_2 = \sum_k S_k h_{2-k}$$

$$= 0 \ 2 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ *$$

$$-1 \ 0.5 \ 3 \ 1 =$$

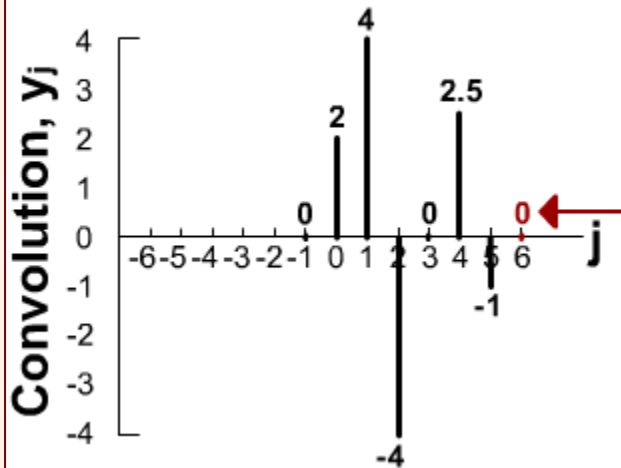
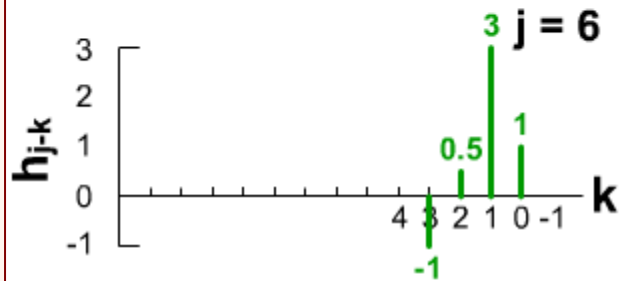
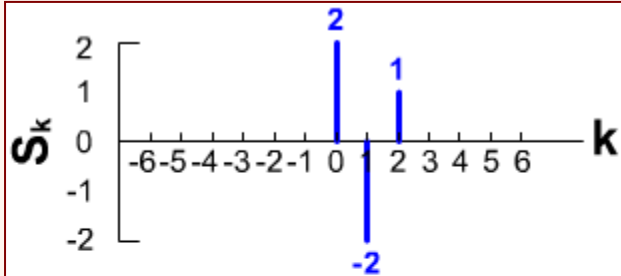
$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$

مثال (ادامه...)



$$y_6 = \sum_k S_k h_{6-k}$$

$$= 0 \cdot 2 \cdot -2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot *$$

$$-1 \cdot 0.5 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$

$$(2 \times -1) + (-2 \times 0.5) + (1 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(-2 \times -1) + (1 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 2.5$$

$$(1 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = -1$$

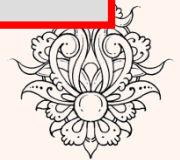
$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

کانولوشن دوبعدی

- نتیجه‌ی عبور سیگنال از فیلترهای خطی توسط کانولوشن سیگنال اصلی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست می‌آید.

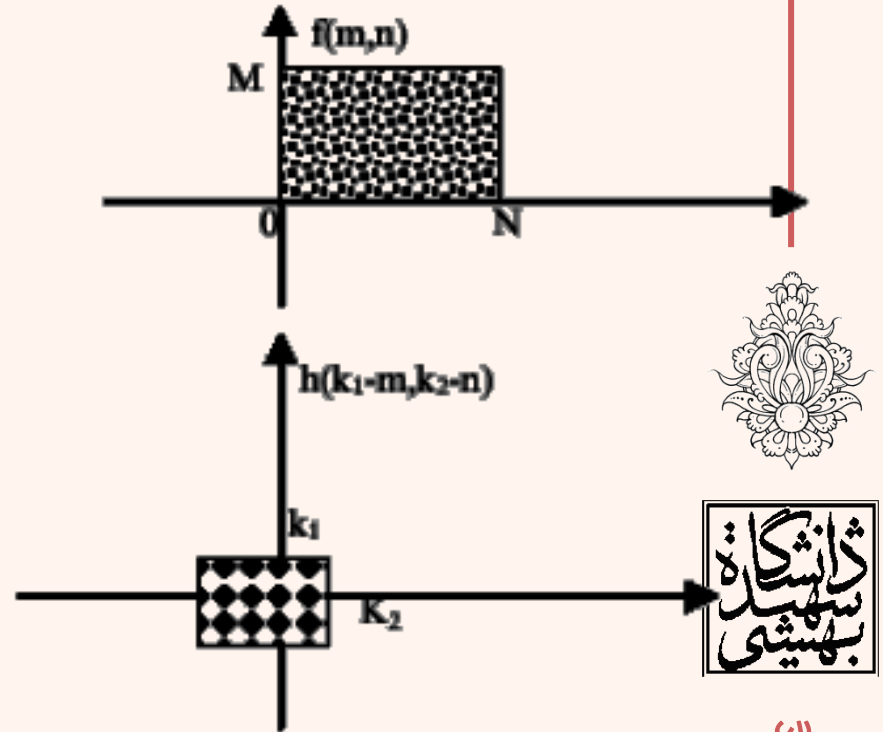
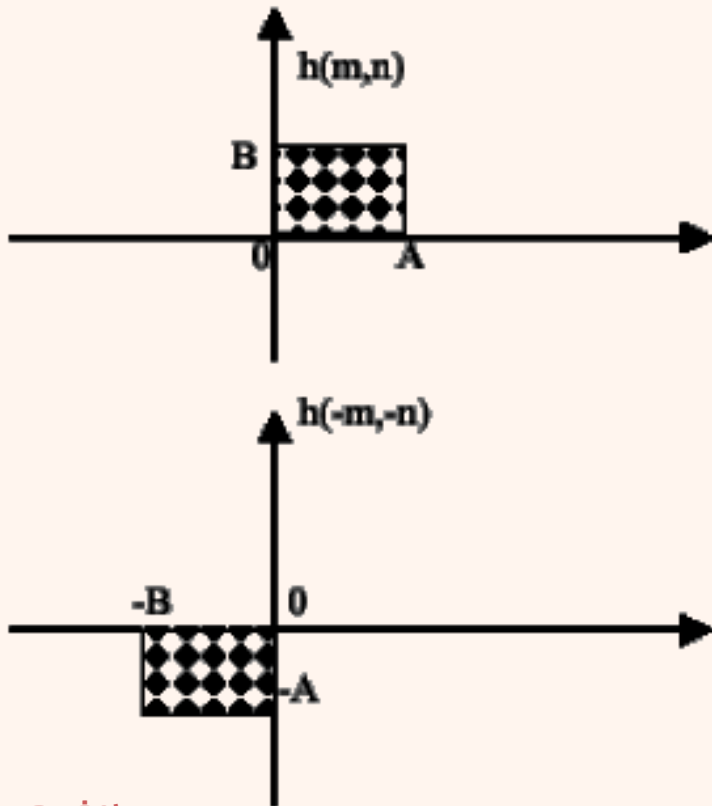
$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) h(m-k, n-l)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k, l) f(m-k, n-l)$$

- «*» نشان‌دهنده‌ی کانولوشن خطی است، ابتدا h قرینه می‌شود و با انتقال به اندازه‌ی (m, n) رابطه مذکور محاسبه می‌شود.



کانولوشن دوبعدی (ادامه...)

- اگر ماتریس $f(m,n)$ به اندازهی $M \times N$ باشد و h به اندازهی $A \times B$ ، ماتریس $g(m, n)$ دارای اندازهی $(M+A-1, N+B-1)$ خواهد بود.



مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
figure,imshow(f,[ ]),title('Original');  
F=fft2(f);  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',128,128,sig);  
figure,imshow(H,[ ]),title('LPF');  
figure,imshow(fftshift(H),[ ]),title('centered LPF');  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');  
figure,imagesc(g(1:15,:));
```

Filtered



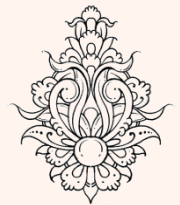
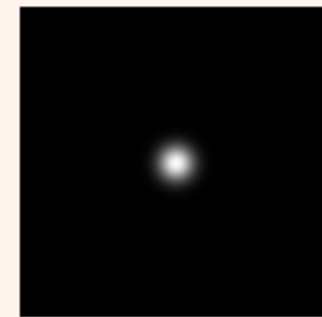
Original



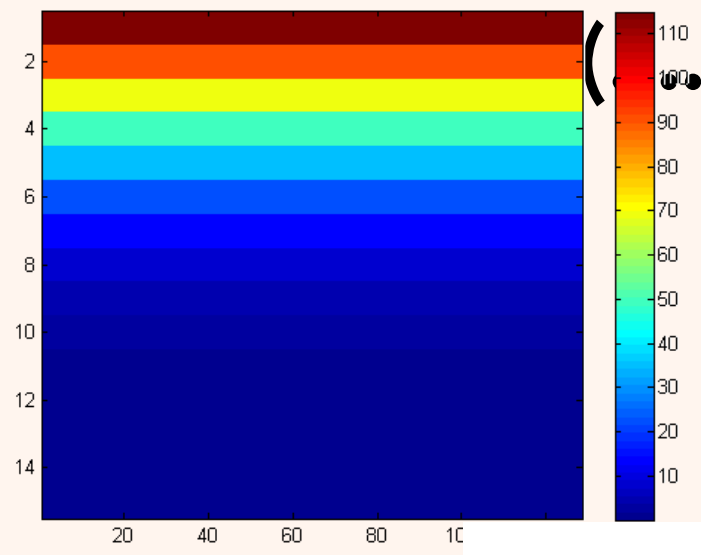
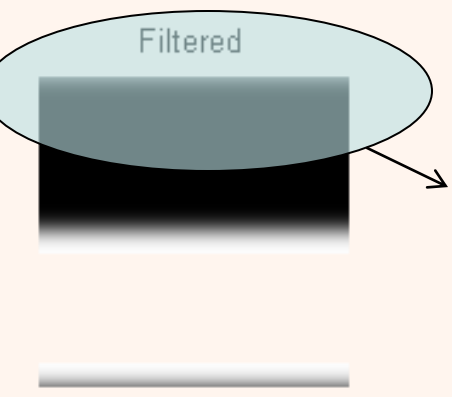
LPF



centered LPF



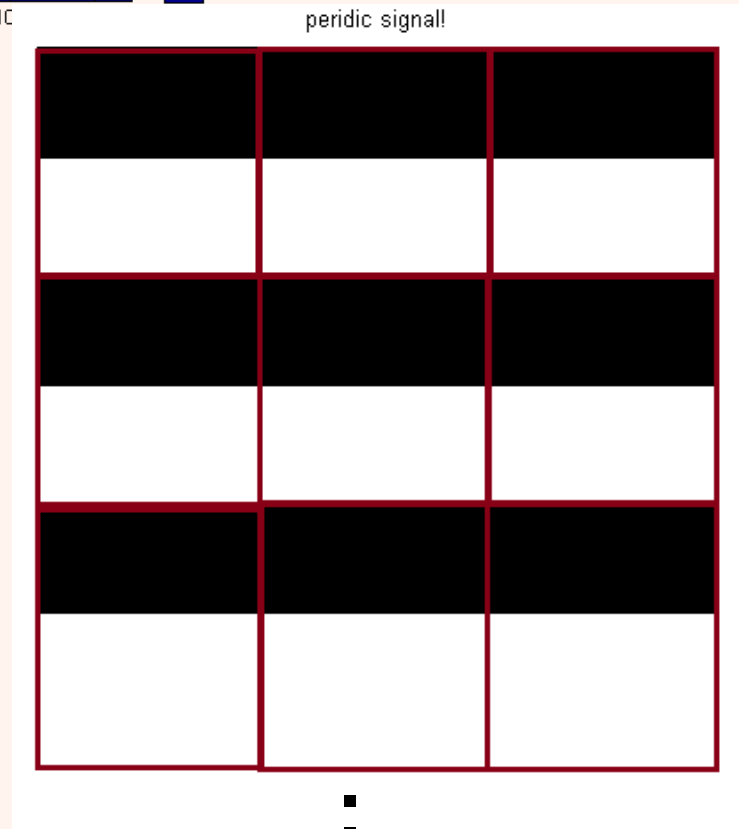
مثال (ادامه...)



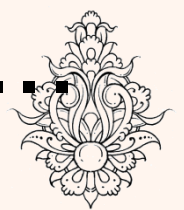
■
■
■

periodic signal!

■ ■ ■

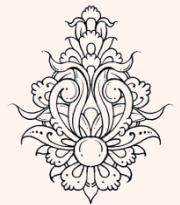


■
■
■



کانولوشن دایروی

- همانند سیگنال یک بعدی، رابطی کانولوشن دوبعدی به صورت خطی است و به طور کلی خواص کانولوشن دوبعدی مشابه کانولوشن یک بعدی است.
- برای استفاده در روابط **DFT** از «کانولوشن دایروی» استفاده می‌شود.
- برای تساوی کانولوشن خطی و دایروی لازم است در ابتدا اندازه‌ی دو ماتریس سیگنال اصلی و پاسخ ضربه، به اندازه‌ی حاصل کانولوشن خطی گسترش یابد.
- این فرآیند با افزایش صفر صورت می‌گیرد.



کانولوشن دایروی با تناوب $(N+B-1) \times (M+A-1)$ معادل کانولوشن خطی است.

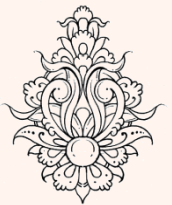
افزایش صفر

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A-1, \quad 0 \leq n \leq B-1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$M_1 = M + A - 1, \quad N_1 = N + B - 1$$

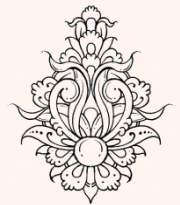
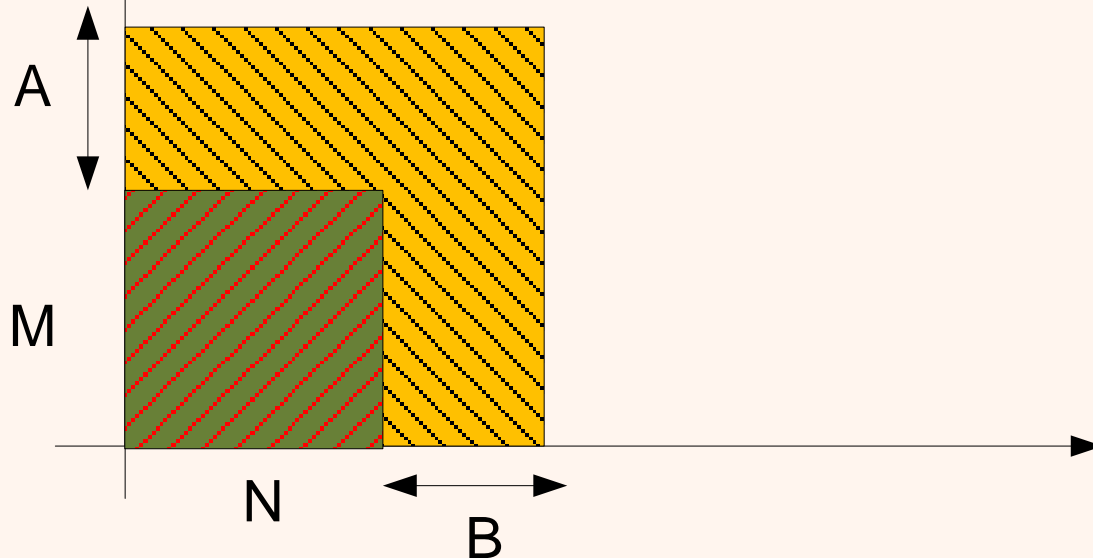
- فرضیهی متناوب بودن f و h اعمال می‌شود، و کانولوشن متناوب محاسبه شده، یک دوره از آن در نظر گرفته می‌شود.



افزایش صفر (ادامه...)

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M - 1, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

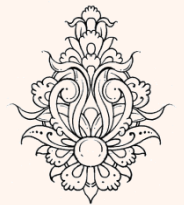
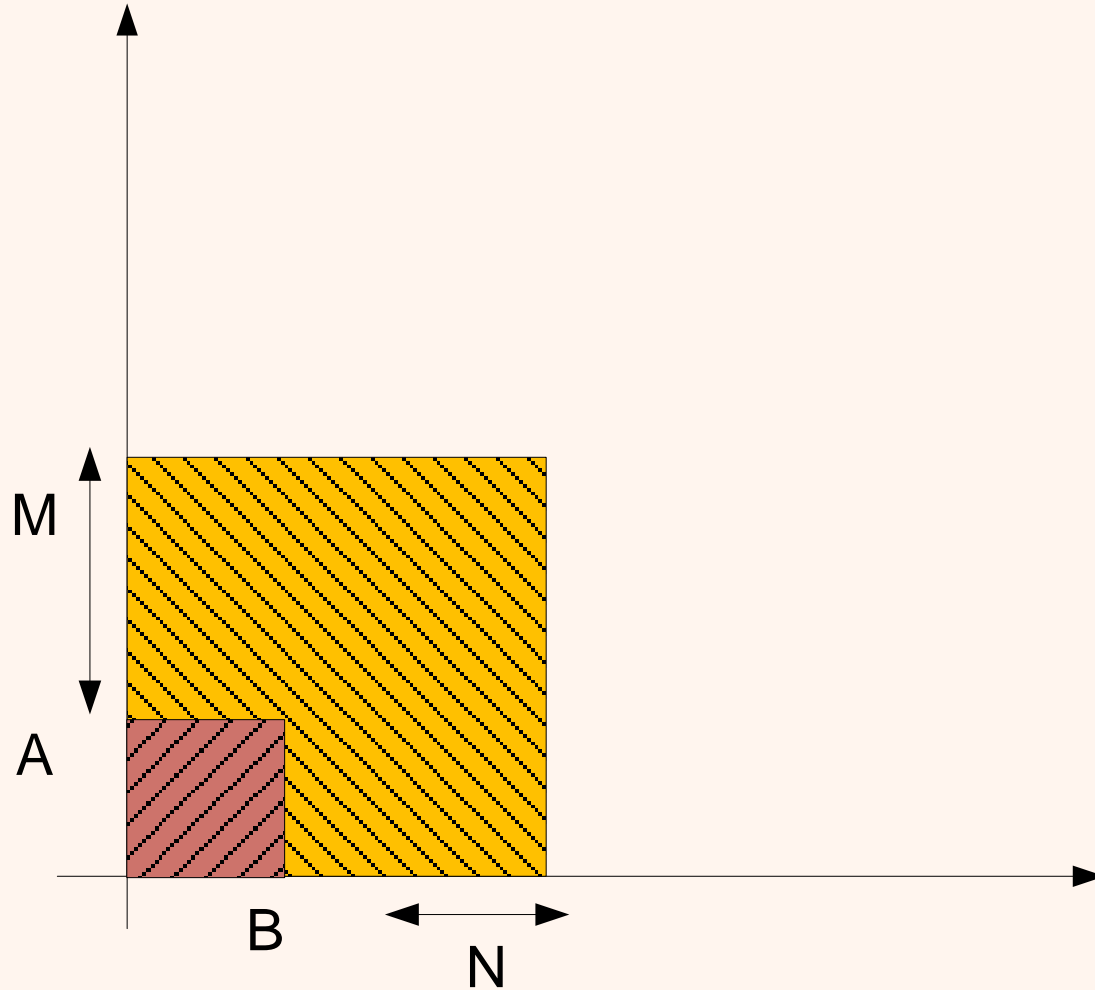
f $M \times N$
 h $A \times B$



افزایش صفر (ادامه...)

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A - 1, \quad 0 \leq n \leq B - 1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f \quad M \times N \\ h \quad A \times B \end{array}$$



محاسبه‌ی کانولوشن در حوزه‌ی فرکانس

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$\text{if } X(\omega) = F\{x(n)\}, \quad H(\omega) = F\{h(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) = x(n) * h(n)$$

$$F\{y(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \right] e^{-j\omega n} \quad n-k = m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(m) \right] e^{-j\omega(m+k)} = X(\omega)H(\omega)$$

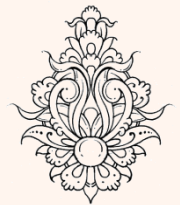
فضای دوبعدی

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) * h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) \cdot h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} \{F_e(u, v) * H_e(u, v)\}$$



کانولوشن در موزه‌ی زمان مکان معادل ضرب در موزه‌ی فرکانس خواهد بود

ضرب در موزه‌ی زمان مکان معادل کانولوشن در موزه‌ی فرکانس است



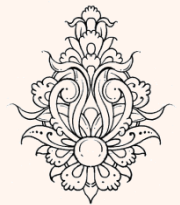
مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),2*sig);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');
```

Full Padded result



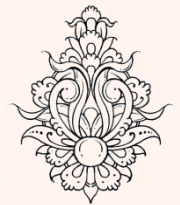
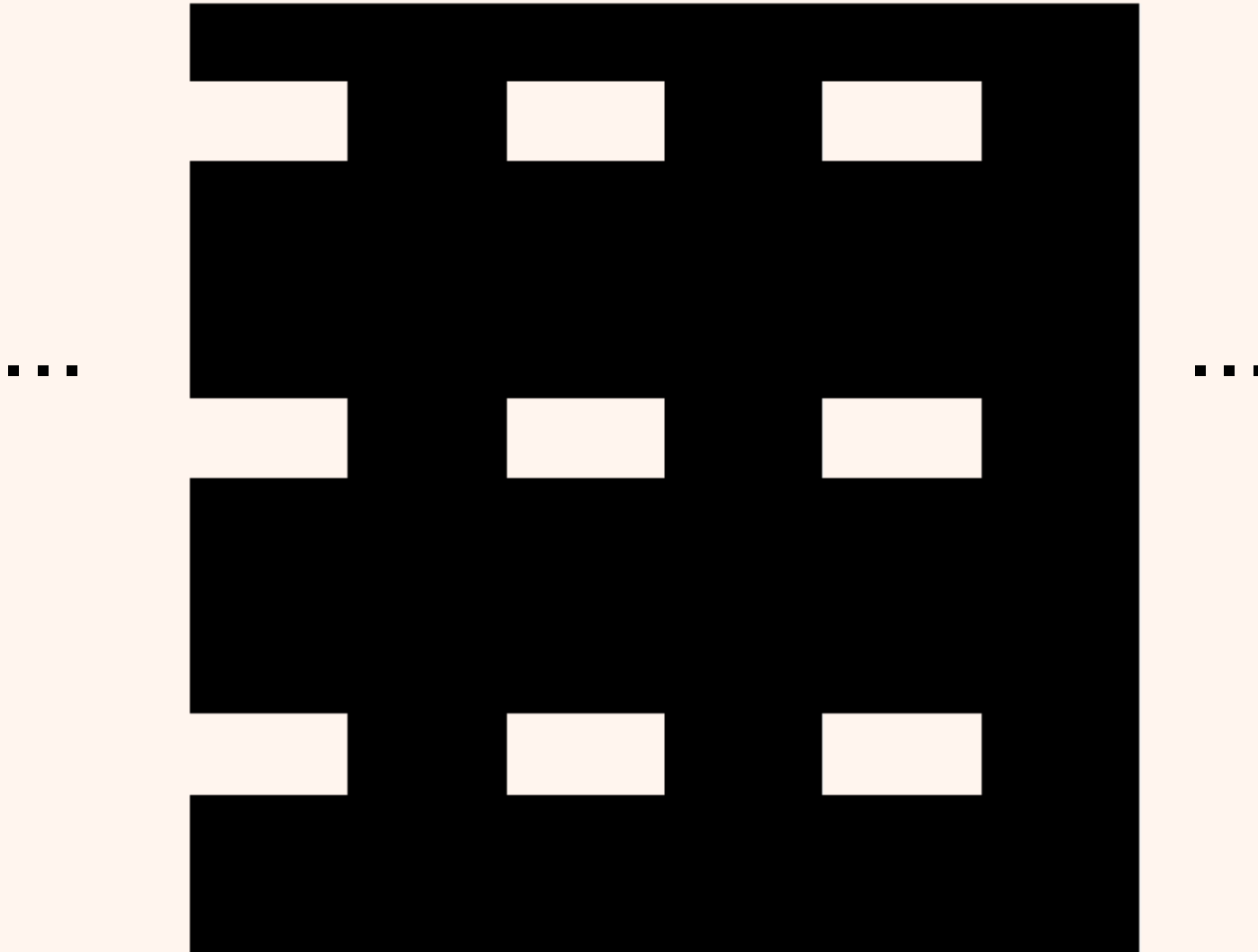
Filtered



مثال (ادامه...)

⋮

periodic signal!

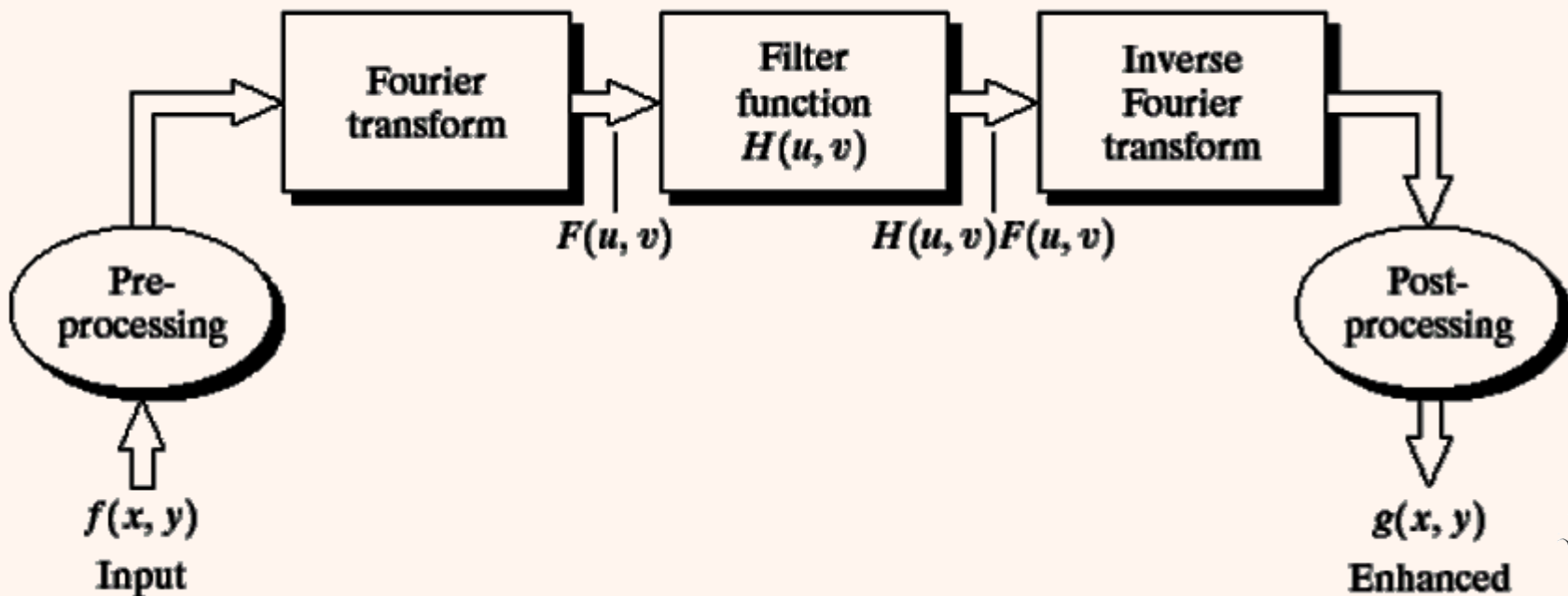


⋮

اعمال فیلتر در دامنه فرکانس

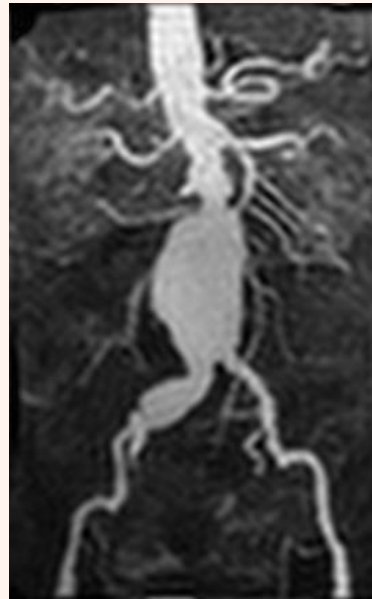
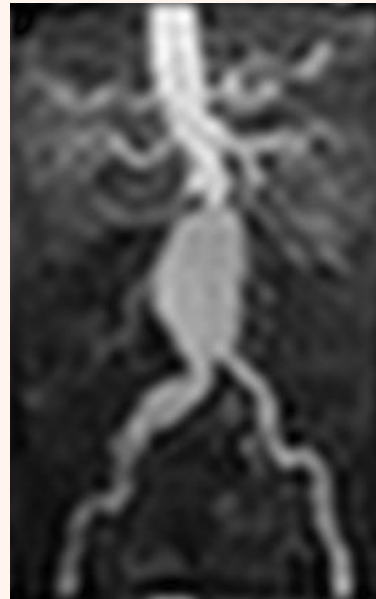
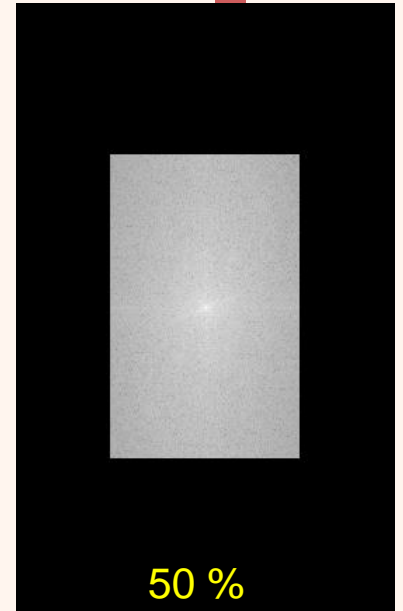
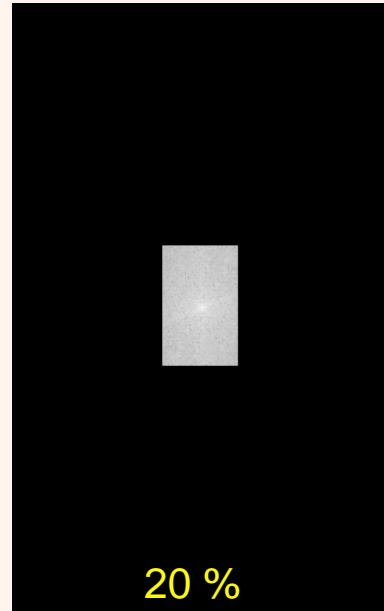
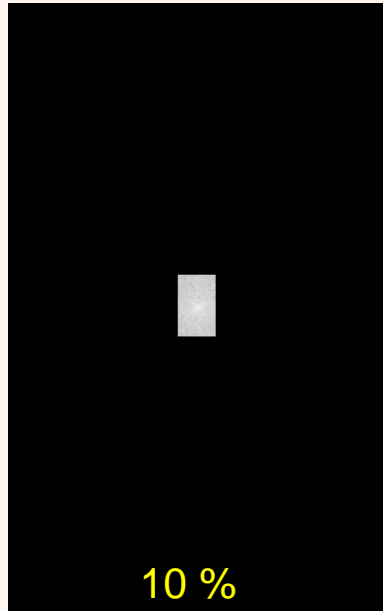
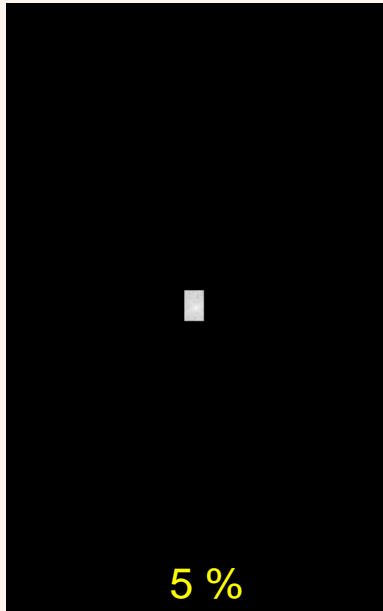
Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Frequency domain filtering operation



در مواردی که پنجره‌ی مورد نظر بزرگ است اعمال فیلتر در دامنه فرکانس به لحاظ محاسبات از کارایی بیشتری برخوردار است.

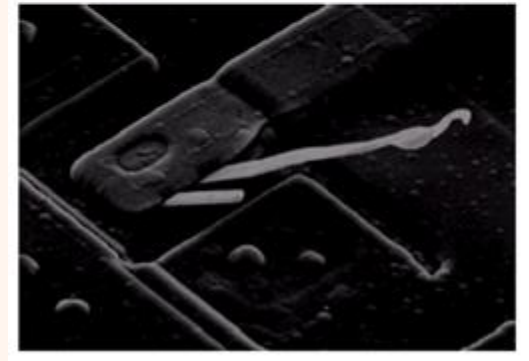
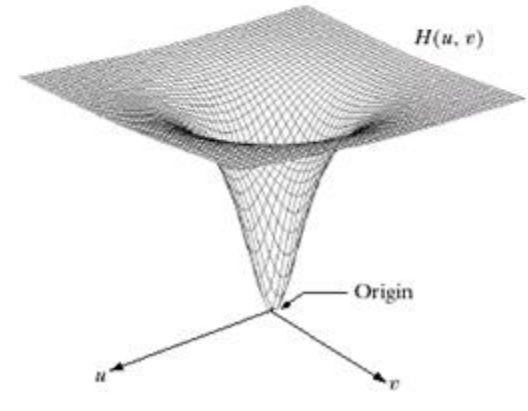
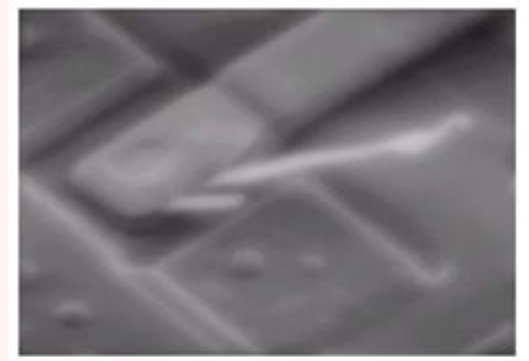
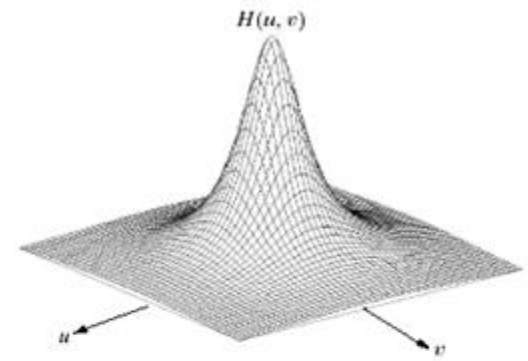
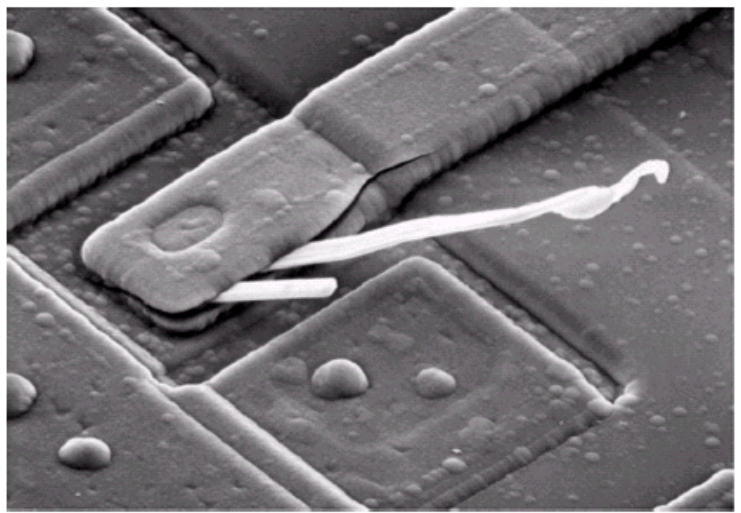




۷۴

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Low Pass Filter



High Pass Filter

بهشتی

مراحل اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

تعداد صفرهای بهینه برای اضافه کردن را با توجه به اندازه‌ی تصویر به دست آورید.

تبدیل فوریه را برای تصویر با توجه به اندازه‌ی جدید به دست آورید.

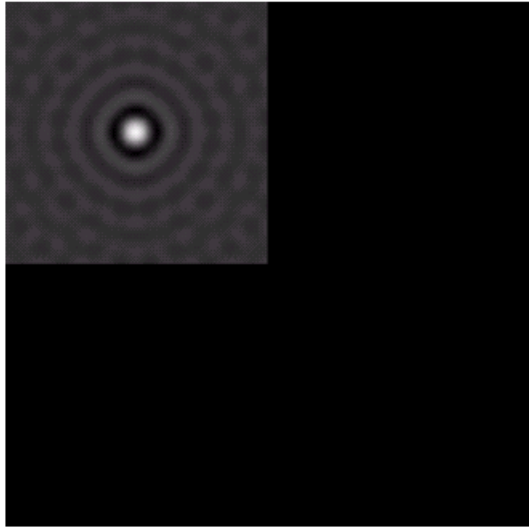
فیلتر مورد نظر را برای اندازه‌ی جدید به دست آورید. (اندازه‌ی فیلتر و تصویر اصلی باید یکسان باشد)

تصویر و فیلتر را در هم ضرب نمایید.



از نتیجه‌ی به دست آمده تبدیل معکوس فوریه گرفته برای اندازه‌ی تصویر اصلی آنرا برش دهید.

مثال



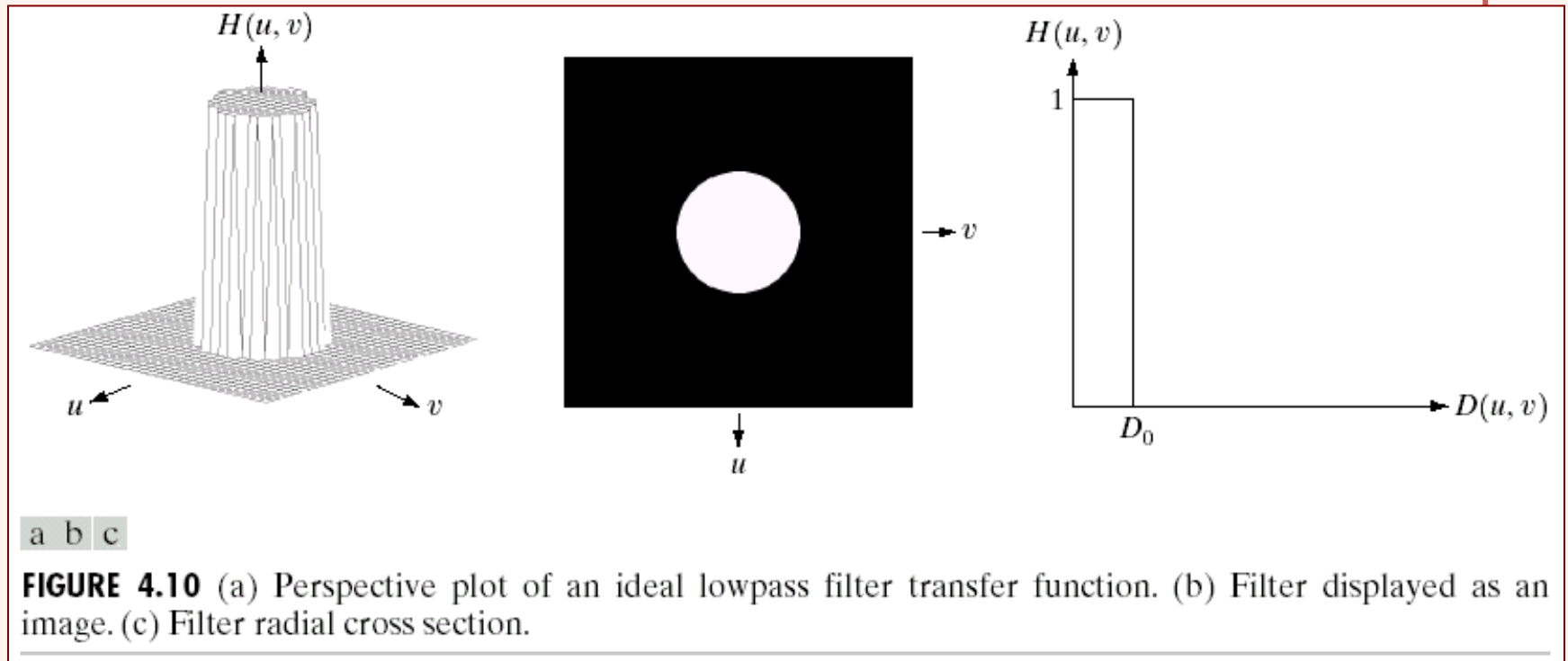
Padded Lowpass Filter in
the Spatial domain



Result of filtering with padding



فیلتر ایده آل



اعمال فیلتر ایده‌آل

Ideal filter

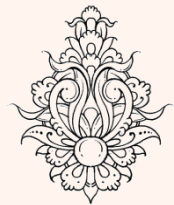
```
f = imread('cameraman.tif');  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
imshow(fftshift(H),[ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g,[ ]);
```

Filtered



Org

Ideal Filter



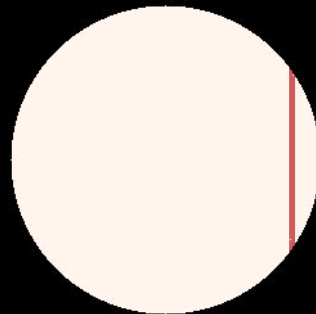
Sig=10

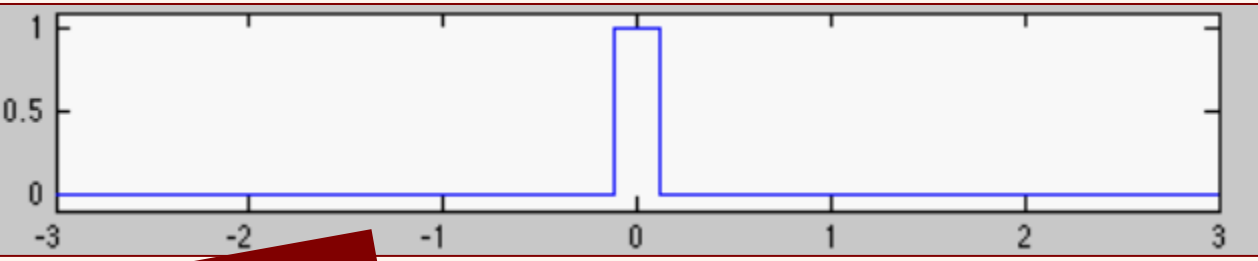


Sig=20

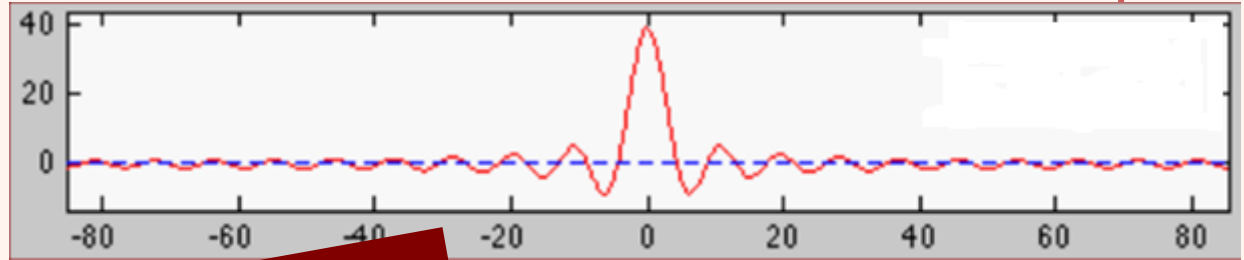


Sig=120

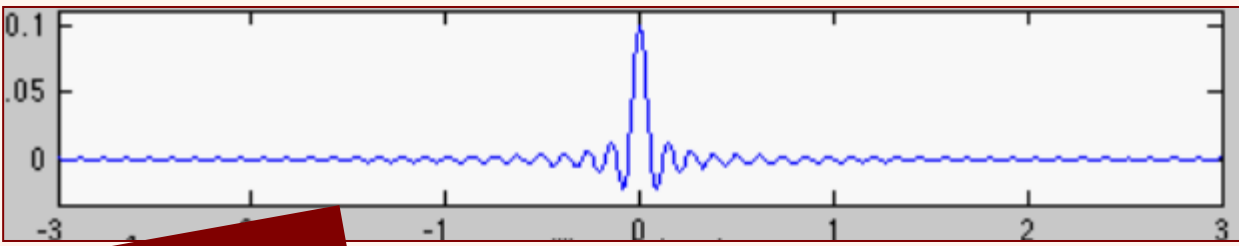




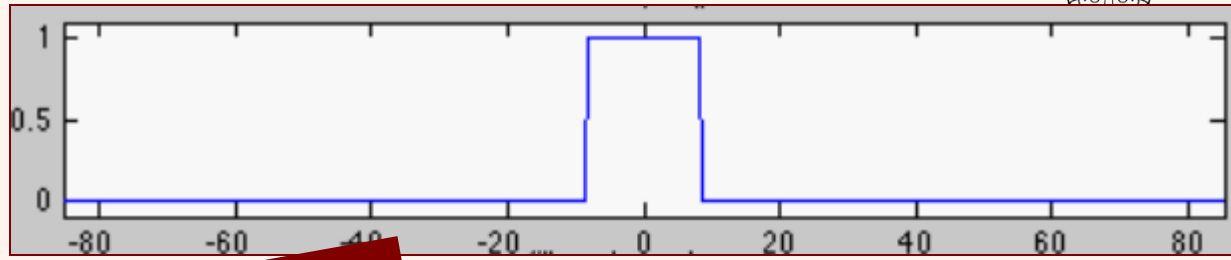
Spatial



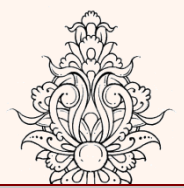
Frequency



Spatial



Frequency



فیلتر پایین‌گذر گاوسی

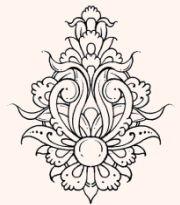
- ساختار فیلتر مذکور مانند زیر است:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

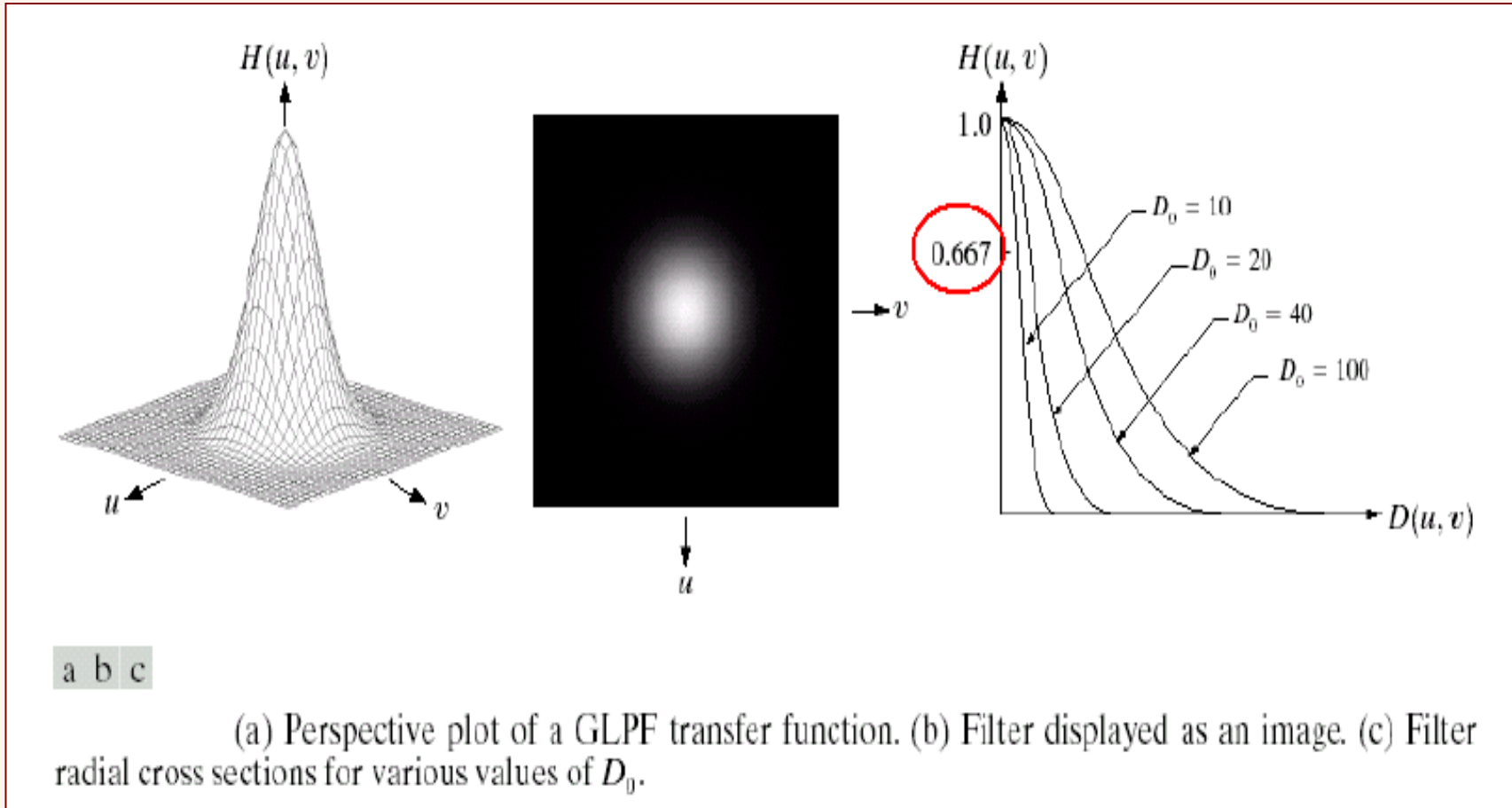
$D(u, v)$ بیان‌گر فاصله از مرکز است.

- اگر $\sigma = D_0$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



فیلتر پایین‌گذر گاوسی



تأسیسات
سازمان
بهره‌مندی

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, [ ]);  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
figure;  
imshow(fftshift(H), [ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g, [ ]);
```

Filtered



Org

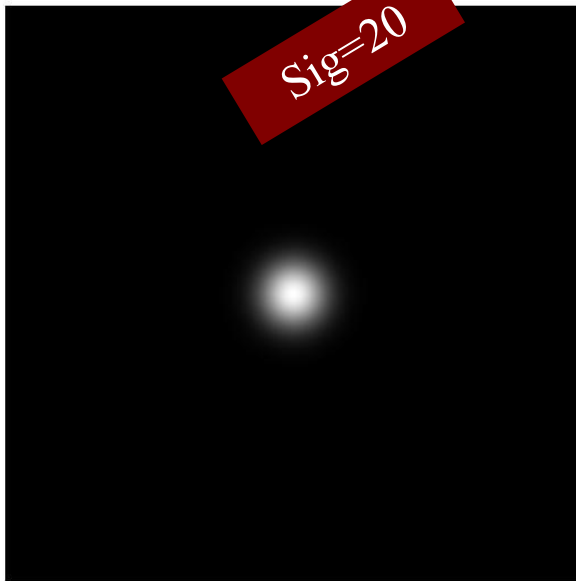
Gaussian Filter



Sig=10



Sig=20



Sig=120




fax transmissions


a b

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).
 (b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



تاسیسات
سپهر
بهشتی

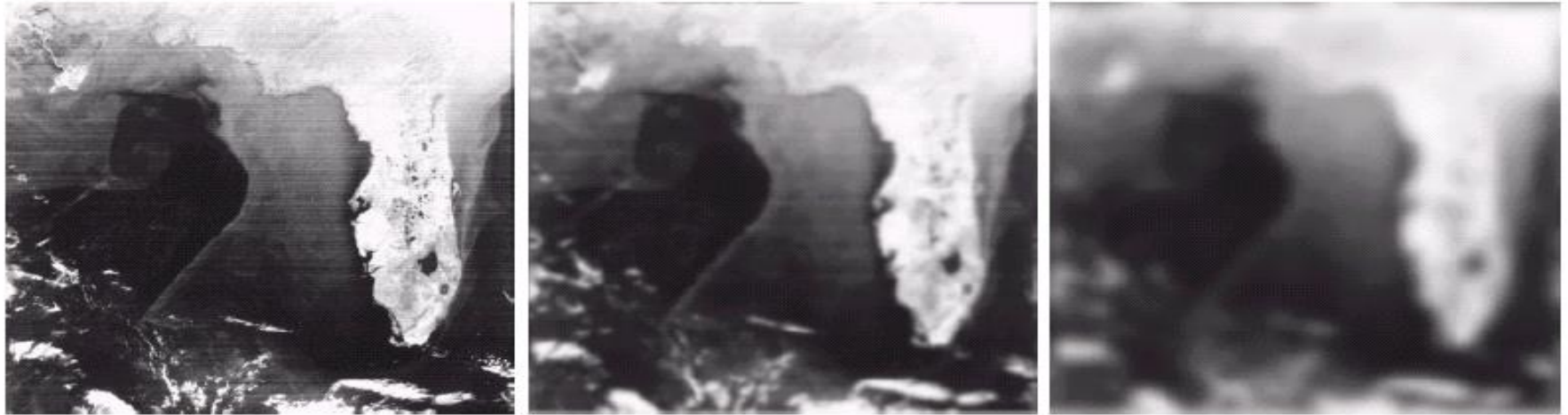
از جزئیات ریز صرفنظر می‌شود



a b c

(a) Original image (1028×732 pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 80$. Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

• کاهش خطوط ناشی از اسکن نمودن



a b c

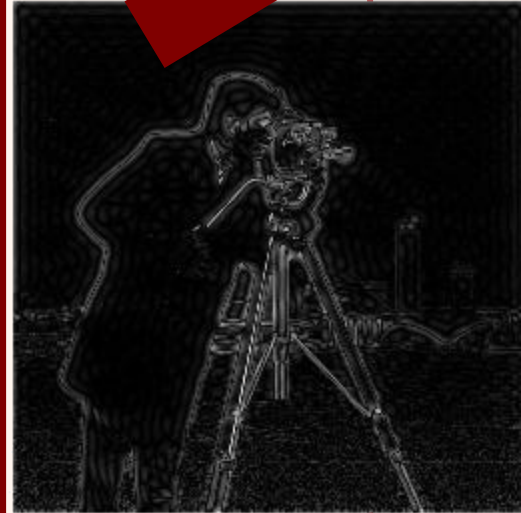
(a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with $D_0 = 30$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 10$. (Original image courtesy of NOAA.)

High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```

فیلتر بالا

Filtered



Org

Ideal High pass

Filtered



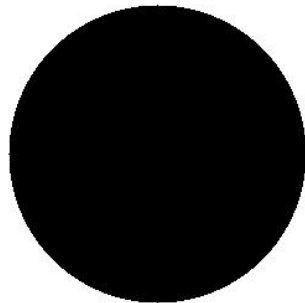
Sig=10



Sig=20



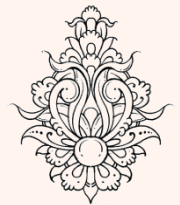
Sig=120



High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```

فیلتر بالا

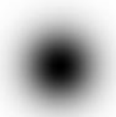


Filtered

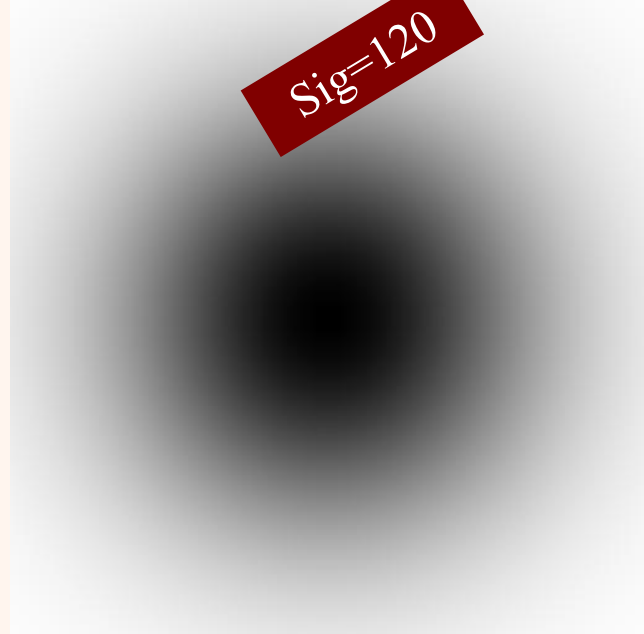
Sig=10



Sig=20



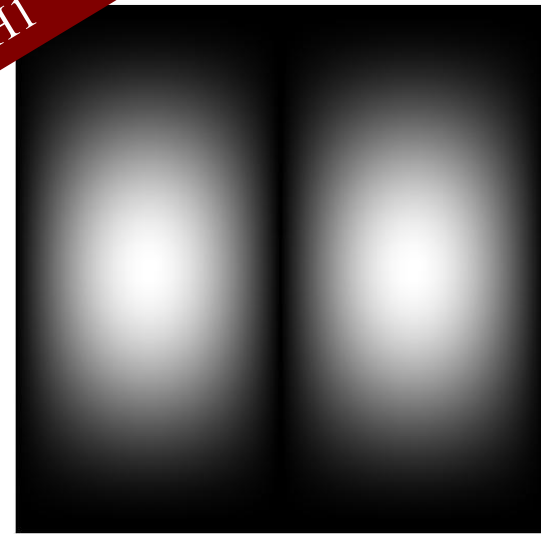
Sig=120



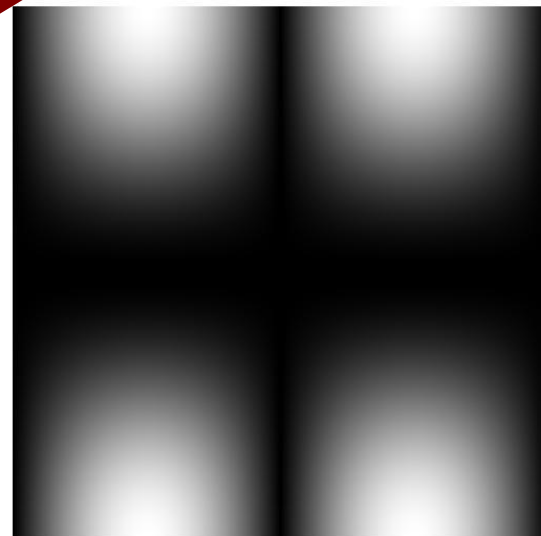
به دست آوردن معادل فیلتر

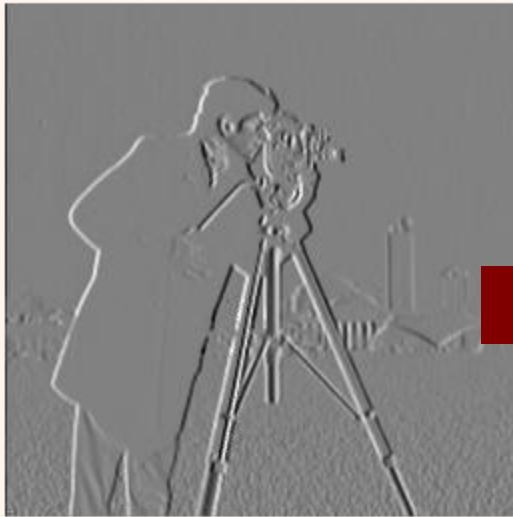
```
clear all,clc;
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[ ]);
h=fspecial('sobel');
PQ=paddedsz(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
H1=freqz2(h,PQ(1),PQ(2));
H=fftshift(H1);
figure;imshow(abs(H1),[ ]);
figure;imshow(abs(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;imshow(g,[ ]);
figure;imshow(abs(g),[ ]);
gs=imfilter(double(f),h);
Figure;imshow(gs,[ ]);
Figure;imshow(abs(gs),[ ]);
d=abs(gs-g);
max(d(:))
```

H1

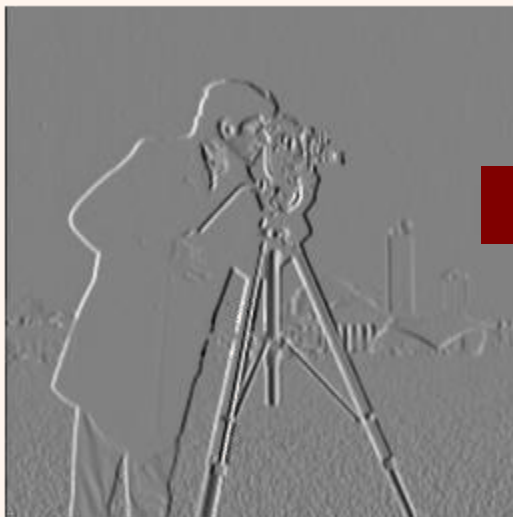


H





دامنه ی فرکانس



دامنه ی زمان-مکان

